К3 поверхности

А. КУЗНЕЦОВ

Аннотация. Поверхности типа К3 — один из наиболее интересных и важных классов алгебраических (а также комплексно-аналитических) поверхностей. В этих лекциях будет дано краткое введение в их теорию. Я планирую вычислить основные инварианты и привести примеры К3 поверхностей, сформулировать и объяснить теорему Торелли, дающую основной способ работы с К3 поверхностями, а также рассказать о некоторых шагах в ее доказательстве.

Содержание

Я благодарен Институту математики им. С.Л. Соболева СО РАН за приглашение прочитать эти лекции.

1. Геометрия К3 поверхностей

У названия “К3 поверхность” есть два объяснения:

- с одной стороны, название отмечает вклад трех замечательных математиков, чьи результаты были крайне важны для изучения этих поверхностей — **Кэлера**, **Куммера** и **Кодаиры**;
- с другой стороны, оно ассоциируется с горой **К2** — второй после Эвереста в мире по высоте, но значительно превосходящей Эверест по сложности.

Это поистине замечательный класс алгебраических многообразий.

1.1. Определение.

Хотя К3 поверхности можно (и нужно) изучать над произвольными полями, мы ограничимся случаем поля комплексных чисел.

Напомним, что всякому гладкому (комплексному) многообразию X размерности n естественным образом сопоставляется линейное расслоение

$$\omega_X := \det(\Omega_X) = \wedge^n \Omega_X$$

(голоморфных) дифференциальных форм старшей степени — каноническое расслоение. Его первый класс Черна обозначается

$$K_X := \mathrm{c}_1(\omega_X) = \mathrm{c}_1(\Omega_X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

и называется каноническим классом.

Кроме того, напомним, что всякое комплексное многообразие размерности n является глаким вещественным многообразием размерности $2n$, в частности его группы сингулярных когомологий удовлетворяют двойственности Пуанкаре.

Определение 1.1. Гладкая компактная связная поверхность X называется К3 поверхностью, если

(1) $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ и
(2) $K_X = 0$.

Заметим, что в силу двойственности Пуанкаре условие (1) эквивалентно условию $H^3(X, \mathbb{C}) = 0$.

Для алгебраической геометрии наибольший интерес представляют *проективные* (или *алгебраические*) К3 поверхности X, то есть такие, что существует (голоморфное) вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ в комплексное проективное пространство. При этом “общая” К3 поверхность *не является* проективной (пример 1.5 показывает как можно построить пример непроективной К3 поверхность). Однако, даже при изучении проективных К3 поверхностей, полезно использовать непроективные.

Замечание 1.2. Еще один интересный класс комплексных поверхностей с тривиальным каноническим классом образуют комплексные торы. Их теореия значительно проще чем теория К3 поверхностей, хотя во многом они похожи. Например, как и К3 поверхности, торы бывают непроективными (и более того, общий тор непроективен).

1.2. Примеры К3 поверхностей.

Вот простейший пример К3 поверхности.

Лемма 1.3. *Гладкая квартика $X \subset \mathbb{P}^3$ является К3 поверхностью.*

Доказательство. Для вычисления канонического класса квартики удобно воспользоваться *формулой присоединения*: если $X \subset Y$ гладкая комплексная гиперповерхность, то

$$K_X = (K_Y + [X])|_X, \tag{1.1}$$

где в правой части $[X] \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ — фундаментальный класс подмногообразия $X \subset Y$ (вещественной коразмерности 2). Так как

$$K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H,$$

где $H \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ — класс гиперплоскости (эта формула может быть получена либо явным выписыванием мероморфной дифференциальной формы и описанием ее полюсов, либо из точной последовательности Эйлера для касательного расслоения). В частном случае 3-мерного пространства выполнено $K_{\mathbb{P}^3} = -4H$, и так как для квартики $X \subset \mathbb{P}^3$ имеем $[X] = 4H$, получаем $K_X = 0$.

Зануление $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ следует из теоремы 1.4, так как $H^1(\mathbb{P}^3, \mathbb{C}) = 0$. □

Теорема 1.4 (теорема Лефшеца). *Пусть $Y \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое проективное многообразие, а $D \subset \mathbb{P}^N$ — гиперповерхность, такая что $X := Y \cap D$ тоже гладко. Тогда отображения ограничения*

$$H^k(Y, \mathbb{Z}) \to H^k(X, \mathbb{Z}) \qquad \text{и} \qquad H^k(Y, \mathbb{C}) \to H^k(X, \mathbb{C})$$

являются изоморфизмами при $k < \dim(X)$ и вложениями при $k = \dim(X)$.

Принципиально другой пример K3 поверхности может быть получаен из комплексного тора.

Пример 1.5. Пусть $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. Рассмотрим инволюцию

$$\iota\colon T \to T, \qquad t \mapsto -t.$$

Тогда $X_0 := T/\iota$ является особой комплексной поверхностью с 16 обыкновенными двойными точками (соответсвующими точкам второго порядка $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^4/\mathbb{Z}^4$ на торе). Раздувая особые точки, получаем гладкую поверхность $X = \mathrm{Ku}(T)$, которая является K3 поверхностью.

На смом деле, возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \tilde{T} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T \arrow[dr] & & X, \arrow[dl] \\ & X_0 & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

в которой $\tilde{T} \to T$ — раздутие 16-ти неподвижных точек инволюции ι, а $\tilde{T} \to X$ — фактор по инволюции $\tilde{\iota}\colon \tilde{T} \to \tilde{T}$, индуцированной ι, иначе говоря, это двулистное накрытие разветвленное в 16-ти исключительных кривых раздутия $X \to X_0$.

Поверхность $\mathrm{Ku}(T)$, построенная в примере 1.5 называется поверхностью Куммера. Если в качестве тора T взять неалгебраический тор, то $\mathrm{Ku}(T)$ — неалгебраическая K3 поверхность.

Пользуясь теми же приемами легко построить другие примеры K3 поверхностей.

Пример 1.6. Следующие гладкие многообразия являются K3 поверхностями:

(0) двулистное накрытие $X \to \mathbb{P}^2$ разветвленное в гладкой кривой степени 6;
(1) пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$;
(2) пересечение 3 квадрик в $\mathbb{P}^5$;
(3) пересечение 3 гиперплоскостей и квадрики с $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$;
(4) пересечение 8 гиперплоскостей с $\mathrm{OGr}_+(5,10) \subset \mathbb{P}^{15}$;
(5) пересечение 6 гиперплоскостей с $\mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$;
(6) пересечение 4 гиперплоскостей с $\mathrm{LGr}(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$;
(7) пересечение 3 гиперплоскостей с $\mathrm{G}_2/\mathrm{P}_2 \subset \mathbb{P}^{13}$.

Для квартик, а также во всех пунктах примера 1.6, если рассматривать достаточно общую поверхность указанного типа, то группа $\mathrm{Pic}(X)$ линейных расслоений на X порождена ограничением H_X класса H с указанного проективного пространства. Класс H_X называется поляризацией, а индекс пересечения $\mathrm{d}(X) := (H_X, H_X)$ — его степенью. Легко проверить, что конструкции леммы 1.3 и примера 1.6 дают поляризованные K3 поверхности степеней

$$\mathrm{d}(X) \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}.$$

На самом деле, степень поляризации всегда четное положительное число (см. лемму 2.2) и $\mathrm{d}(X)$ может принимать любое четное положительное значение (см. следствие 2.3).

1.3. **Основные инварианты.** Наиболее удобные инварианты алгебраических многообразий получаются из когомологий пучков, связанных с ними.

Напомним, что в геометрии как правило рассматривают пучки одного из двух видов:

- *локально постоянные* пучки, такие как $\underline{\mathbb{Z}}$ или $\underline{\mathbb{C}}$;
- *когерентные* пучки, то есть пучки (голоморфных) сечений (голоморфноых) векторных расслоений или коядра морфизмов таких пучков.

Хотя, например, пучок $\mathcal{O}_X^\times$ обратимых голоморфных функций не является ни тем, ни другим.

Во всех случаях пучку $\mathcal{F}$ сопоставляется абелева группа $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ его глобальных сечений, а старшие когомологии $H^i(X,\mathcal{F})$ определяются как *производные функторы* от функтора глобальных сечений. Для локально постоянных пучков когомологии можно вычислять с помощью клеточного разбиения пространства X (аналогично тому, как вычисляются обычные сингулярные когомологии, которые есть ни что иное как когомологии X с коэффициентами в *постоянном пучке* $\underline{\mathbb{Z}}$), а для когерентных пучков по Чеху — с помощью достаточно тонкого открытого покрытия пространства X. Однако, чаще всего, когомологии вычисляют, выражая пучок с помощью точных последовательностей через более простые и пользуясь тем фактом, что короткая точная последовательность $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ пучков приводит к длинной точной посллeдовательности

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}_1) \to H^0(X,\mathcal{F}_2) \to H^0(X,\mathcal{F}_3) \to H^1(X,\mathcal{F}_1) \to \dots$$

их когомологий. Важно понимать, что когомологии определены (и являются инвариантами) для любого пучка абелевых групп, причем для комплексного многообразия размерности n и когерентного пучка $\mathcal{F}$ выполняется зануление $H^{>n}(X,\mathcal{F}) = 0$ (например, так как такие пучки обладают резольвентами Дольбо), а для локально постоянных пучков — более слабое зануление $H^{>2n}(X,\mathcal{F}) = 0$ (например, поскольку X обладает клеточным разбиением с клетками размерностей не больше $2n$).

Наиболее естественными когерентными пучками, связанными с комплексным многообразием X являются пучки (голоморфных) дифференциальных форм $\Omega_X^p := \wedge^p\Omega_X$ (заметим, что по определению $\Omega_X^0 = \mathcal{O}_X$ — пучок голоморфноых функций), а наиболее важными инвариантами — их когомологии (комплексные векторные пространства) и их размерности (числа)

$$H^{p,q}(X) := H^q(X,\Omega_X^p) \qquad \text{и} \qquad h^{p,q}(X) := \dim H^{p,q}(X). \tag{1.3}$$

Они называются **когомологиями Дольбо** (или **Ходжа**) и **числами Ходжа**, соответственно. Числа Ходжа традиционно записываются в виде ромба (называемого **ромбом Ходжа**), строки которого соответсвуют числам с фиксированной суммой $p+q$, которая возрастает снизу вверх. Для кэлеровых многообразий ромб Ходжа симметричен относительно горизонтальной и вертикальной осей.

Теорема 1.7. *Числа Ходжа K3 поверхности X и двумерного комплексного тора T имеют вид:*

$$h^{p,q}(X) = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \qquad h^{p,q}(T) = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 1 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ и $\omega_T \cong \mathcal{O}_T$.

Доказательство. Важный факт (не только для доказательства этой теоремы) — это связь когомологий Ходжа с сингулярными когомологиями. Она возникает из *резольвенты де Рама* — точной последовательности пучков, которая для поверхности X принимает вид

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{O}_X \to \Omega_X \to \Omega_X^2 \to 0.$$

Разрезая ее на короткие точные последовательности и выписывая длинные точные последовательности их когомологий, можно выразить когомологии $H^k(X,\mathbb{C})$ через когомологии $H^q(X,\Omega_X^p)$. Эту связь можно компактно записать в виде *спектральной последовательности Ходжа–де Рама*

$$\left\{\begin{tikzcd} H^2(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & H^2(X,\Omega_X) \arrow[r] & H^2(X,\Omega_X^2) \\ H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & H^1(X,\Omega_X) \arrow[r] & H^1(X,\Omega_X^2) \\ H^0(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r] & H^0(X,\Omega_X) \arrow[r] & H^0(X,\Omega_X^2) \end{tikzcd}\right\},$$

которая сходится к сингулярным когомологиям $H^k(X,\mathbb{C})$. Эта спектральная последовательность вырождается в первом члене для любого проективного, и даже для любого *кэлерова* многообразия X (а по *теореме Сиу* все K3 поверхности кэлеровы), откуда получается *разложение Ходжа*:

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X). \tag{1.4}$$

В случае K3 поверхности, поскольку $H^1(X,\mathbb{C}) = H^3(X,\mathbb{C}) = 0$, получаем

$$H^{1,0}(X) = H^{0,1}(X) = H^{3,0}(X) = H^{0,3}(X) = 0.$$

Аналогично, пользуясь равенствами $H^0(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (в силу связности X) и $H^4(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (по двойственности Пуанкаре), получаем

$$H^{0,0}(X) = H^{2,2}(X) = \mathbb{C}.$$

Теперь докажем, что $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$. Для этого воспользуемся *экспоненциальной последовательностью*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0. \tag{1.5}$$

Она приводит к точной последовательности когомологий

$$\dots \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\mathrm{c}_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \tag{1.6}$$

Заметим, что группа $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)$ изоморфна группе Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ линейных расслоений (с операцией тензорного умножения), а стрелка $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ переводит линейное расслоение в его первый класс Черна. В частности, зануление пространства $H^1(X,\mathcal{O}_X) = H^{0,1}(X)$ (установленное выше) равносильно инъективности этой стрелки, и тем самым дает вложение

$$\mathrm{c}_1\colon \mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}). \tag{1.7}$$

Значит из условия 1.1(2) следует изоморфизм $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$.

Далее, так как $\Omega_X^2 = \omega_X \cong \mathcal{O}_X$, получаем

$$\begin{aligned} H^{2,0}(X) &= H^0(X,\Omega_X^2) \cong H^0(X,\mathcal{O}_X) = H^{0,0}(X) = \mathbb{C}, \\ H^{0,2}(X) &= H^2(X,\mathcal{O}_X) \cong H^2(X,\Omega_X^2) = H^{2,2}(X) = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Остается посчитать размерность $H^{1,1}(X)$ или, эквивалентно, размерность $H^2(X,\mathbb{C})$ или, эквивалентно, эйлерову характеристику X. Тут проще всего воспользоваться *формулой Нётера*:

$$12\chi(X,\mathcal{O}_X) = (K_X,K_X) + \chi(X,\mathbb{C}),$$

где $(-,-)$ обозначает *форму пересечения* на $H^2(X,\mathbb{Z})$. Так как $K_X = 0$ и $\chi(X,\mathcal{O}_X) = 1-0+1 = 2$, получаем $\chi(X,\mathbb{C}) = 24$, и значит $h^{1,1}(X) = 20$.

В случае тора доказательство аналогично, надо только заметить, что $H^1(T,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4$. $\square$

Замечание 1.8. Как мы только что доказали, каноническое расслоение К3 поверхности изоморфно тривиальному, то есть имеет (голоморфное) нигде не обращающееся в нуль сечение. Иначе говоря, на X существует (голоморфная) форма σ старшей степени, которая нигде не обращается в нуль. Иначе говоря, форма σ — *симплектическая.* Так как X компактна, всякая обратимая (голоморфная) функция на нем постоянна, поэтому σ единственна с точностью до умножения на ненулевое число.

Замечание 1.9. Форма σ индуцирует изоморфизм $\mathcal{T}_X \cong \Omega_X$, значит $H^1(X, \mathcal{T}_X) \cong H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C}^{20}$. Это означает, что касательное пространство к деформациям К3 поверхности имеет размерность 20. Заметим при этом, что куммеровские К3 поверхности зависят от 4 параметров (так же как и комплексные торы), а все остальные рассмотренные нами семейства — от 19 параметров. Поэтому не следует ожидать, что они исчерпывают все К3 поверхности.

Целочисленные когомологии К3 поверхности тоже не сложно описать.

Предложение 1.10. *Группа когмологий $H^k(X, \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа ранга*

$$b_k(X) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X) = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ или } k = 4, \\ 0, & k = 1 \text{ или } k = 3, \\ 22, & k = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем вначале, что не существует неразветвленных накрытий $X' \to X$ конечной степени. Действительно, если есть накрытие степени d, то X' — тоже гладкая компактная связная комплексная поверхность с $K_{X'} = 0$. Доказательство теоремы 1.7 примененное к поверхности X' показывает, что

$$\chi(X', \mathbb{C}) = 24 - 12q,$$

где $q = H^{0,1}(X')$. Поэтому

$$24 - 12q = \chi(X', \mathbb{C}) = d \cdot \chi(X, \mathbb{C}) = 24d,$$

и значит $d = 1$. Отсюда следует, что группа $\pi_1(X)$ не имеет конечных факторов, а группа $H_1(X, \mathbb{Z})$ равна нулю. Так как $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, применяя *формулу универсальных коэффициентов*

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{k-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

заключаем, что группы $H^k(X, \mathbb{Z})$ при $k \le 2$ не имеют кручения. Далее, двойственность Пуанкаре

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H^{2n-k}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1(H^{2n+1-k}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

влечет отсутствие кручения также и в группах $H^k(X, \mathbb{Z})$ при $k \ge 3$. Наконец, ранг группы $H^k(X, \mathbb{Z})$ очевидно равен размерности векторного пространства $H^k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus H^{p,q}(X)$ то есть $b_k = \sum h^{p,q}$. Значения чисел Бетти получаются из теоремы 1.7. □

В лемме 2.2 мы вычислим форму пересечения на группе $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Замечание 1.11. В доказательстве предложения 1.10 мы проверили, что фундаментальнся группа $\pi_1(X)$ не имеет конечных факторов. На самом деле $\pi_1(X) = 0$, но доказать это сложнее (один из способов, вывести это из теоремы Торелли, см. следствие 3.8.)

Пользуясь вложением (1.7) получаем следующее

Следствие 1.12. *Группа Пикара* $\mathrm{Pic}(X)$ *не имеет кручения.*

2. Отображение периодов и теорема Торелли

В этой секции мы обсудим теорему Торелли — главный инструмент работы с K3 поверхностями.

2.1. **Структура Ходжа.** Пусть Λ — свободная абелева группа конечного ранга. Чистой структурой Ходжа веса k на Λ называется разложение в прямую сумму комплексных подпространств

$$\Lambda \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q},$$

такое что для любых p, q соответствующие компоненты комплексно сопряжены

$$\Lambda^{q,p} = \overline{\Lambda^{p,q}}. \tag{2.1}$$

Оказывается, разложение Ходжа (1.4) задает структуру Ходжа веса k на когомологиях $H^k(X,\mathbb{Z})$ (отфакторизованных по кручению) любого кэлерова многообразия (доказывается это, например, с помощью теории *гармонических дифференциальных форм*). В частности, если X — K3 поверхность, на решетке $\Lambda = H^2(X,\mathbb{Z})$ возникает чистая структура Ходжа веа 2, причем

$$\Lambda^{2,0} \cong \mathbb{C}.$$

Лемма 2.1. *Естественная структура Ходжа на $\Lambda = H^2(X,\mathbb{Z})$ полностью определяется одномерным подпространством $\Lambda^{2,0} = H^{2,0}(X) \subset H^2(X,\mathbb{C}) = \Lambda\otimes\mathbb{C}$. При этом, если $\Lambda^{2,0} = \mathbb{C}\sigma$, то*

$$(\sigma,\sigma) = 0, \qquad (\sigma,\bar\sigma) > 0, \tag{2.2}$$

где $(-,-)$ — форма пересечения.

Доказательство. Утверждение следует из того, что разложение Ходжа (1.4) *мультипликативно*, то есть умножение в когомологиях $\mathbf{m}\colon H^{k_1}(X,\mathbb{C})\otimes H^{k_2}(X,\mathbb{C}) \to H^{k_1+k_2}(X,\mathbb{C})$ обладает свойством

$$\mathbf{m}(H^{p_1,q_1}(X)\otimes H^{p_2,q_2}(X)) \subset H^{p_1+q_1,p_2+q_2}(X). \tag{2.3}$$

Действительно, применяя его к умножению $H^2(X,\mathbb{C})\otimes H^2(X,\mathbb{C}) \to H^4(X,\mathbb{C})$ и пользуясь тем, что

$$H^4(X,\mathbb{C}) = H^{2,2}(X)$$

и тем, что форма пересечения на $H^2(X,\mathbb{C})$ индуцирована умножением, заключаем, что

$$\Lambda^{1,1} = (\Lambda^{2,0})^\perp \cap (\Lambda^{0,2})^\perp,$$

так что для восстановления структуры Ходжа остается заметить, что $\Lambda^{0,2} = \overline{\Lambda^{2,0}}$ ввиду (2.1).

Зануление в (2.2) следует из (2.3), а неравенство следует из явной формулы

$$(\sigma,\bar\sigma) = \int_X \sigma\wedge\bar\sigma$$

так как форма $\sigma\wedge\bar\sigma$ положительна. □

В ледующей секции мы опишем пространство всех возможных структур Ходжа на вторых когомологиях K3 поверхности. Для этого вычислим более явно ее целочисленные когомологии. Напомним, что согласно предложению 1.10 группа $H^2(X,\mathbb{Z})$ является свободной абелевой группой ранга 22.

Лемма 2.2. *Форма пересечения на $H^2(X,\mathbb{Z})$ — невырожденная симметрическая чётная унимодулярная форма сигнатуры* $(3,19)$.

Доказательство. Симметричность очевидна, а невырожденность и унимодулярность следуют из двойственности Пуанкаре.

Четность формы следует из *теоремы Ву*, утверждающей, что для комплексной поверхности канонический класс является *характеристическим элементом* для формы пересечения, то есть для любого класса $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ выполнено

$$(\alpha, \alpha) \equiv (K_X, \alpha) \pmod 2.$$

В случае К3 поверхности правая часть равна нулю, значит (α, α) всегда четно.

Наконец, сигнатуру можно вычислить через класс Понтрягина по *формуле Хирцебруха*:

$$\sigma_+ - \sigma_- = \mathrm{p}_1(X)/3 = (\mathrm{c}_1(X)^2 - 2\mathrm{c}_2(X))/3 = (0 - 2 \cdot 24)/3 = -16.$$

Поскольку с другой стороны $\sigma_+ + \sigma_- = b_2(X) = 22$, то $\sigma_+ = 3$ и $\sigma_- = 19$. □

С использованием классификации четных унимодулярных решеток, отсюда получается

Следствие 2.3. *Имеется изоморфизм решеток*

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{E}_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{U}^{\oplus 3},$$

где $\mathrm{E}_8(-1)$ *— решетка системы корней типа* E_8 *с обращенным знаком квадратичной формы, а* U *— гиперболическая решетка* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

2.2. **Пространство периодов и теорема Торелли.** Рассмотрим решетку

$$\Lambda \coloneqq \mathrm{E}_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{U}^{\oplus 3}.$$

Область периодов К3 поверхностей определяется как

$$\mathcal{D} \coloneqq \{\sigma \in \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C}) \mid (\sigma, \sigma) = 0,\ (\sigma, \bar{\sigma}) > 0\} \subset \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C}). \tag{2.4}$$

Заметим, что условие $(\sigma, \sigma) = 0$ определяет в $\mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C})$ гладкую квадрику (поскольку форма пересечения невырождена), а условие $(\sigma, \bar{\sigma}) > 0$ выделяет в ней открытое (в классической топологии) и связное (так как форма пересечения имеет сигнатуру $(3, 19)$) подмножество. Тем самым, $\mathcal{D}$ — гладкое связное комплексное многообразие размерности

$$\dim \mathcal{D} = \operatorname{rk} \Lambda - 2 = 20$$

На комплексном многообразии $\mathcal{D}$ действует дискретная группа

$$\mathrm{O}(\Lambda) = \{g \colon \Lambda \to \Lambda \mid (gx, gy) = (x, y)\ \forall x, y \in \Lambda\}$$

ортогональных преобразований. Фактор

$$\mathrm{O}(\Lambda) \backslash \mathcal{D}$$

мы будем называть пространством периодов К3 поверхностей.

Замечание 2.4. Действие группы $\mathrm{O}(\Lambda)$ на $\mathcal{D}$ *не является* ни свободным, ни дискретным, поэтому пространство периодов не является ни гладким, ни хаусдорфовым.

Для произвольной К3 поверхности X воспользовавшись леммой 2.2, выберем изоморфизм решеток

$$\varphi \colon H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{} \Lambda$$

(то есть изофорфизм абелевых групп согласованный с билинейными формами) и определим

$$\wp(X, \varphi) \coloneqq \varphi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X)) \in \mathcal{D}, \tag{2.5}$$

где $\varphi_{\mathbb{C}} \colon H^2(X,\mathbb{C}) = H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C} \to \Lambda\otimes\mathbb{C}$ — линейное отображение индуцированное φ, а включение следует из леммы 2.1 и определения (2.4). Так как разные выборы изоморфизма φ отличаются на действие группы $\mathrm{O}(\Lambda)$, мы также можем определить

$$\bar{\wp}(X) := \wp(X,\varphi) \in \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}, \tag{2.6}$$

где в правой части изоморфизм φ выбран произвольно.

Отображения $\wp$ и $\bar{\wp}$ построенные выше назывются отображениями периодов.

Теорема 2.5 (Глобальная теорема Торелли). *Отображение периодов*

$$\{\textit{классы изоморфизма } K3 \textit{ поверхностей}\} \xrightarrow{\bar{\wp}} \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}$$

является "голоморфным" изоморфизмом.

Иначе говоря, глобальная теорема Торелли утверждает, что классы изоморфизма K3 поверхностей описываются пространством периодов. Что означает "голоморфность" в формулировке требует пояснения, так как ни левая ни правая часть не является комплексным многообразием.

2.3. **Голоморфность отображения периодов.** Пусть $\mathcal{X} \to S$ — семейство K3 поверхностей, то есть гладкий собственный морфизм комплексных многообразий, такой что каждый слой является гладкой K3 поверхностью. Если предположить, что классы изоморфизма K3 поверхностей "параметризуются" комплексным пространством $\mathcal{M}$, то семейство должно индуцировать голоморфное отображение $S \to \mathcal{M}$, и если отображение периодов $\bar{\wp} \colon \mathcal{M} \to \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}$ голоморфно, то композиция $S \to \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}$ тоже должна быть голоморфной. Более того, при этом предположении было бы верно и обратное: если любое семейство K3 поверхностей индуцирует голоморфное отображение $S \to \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}$, то и отображение $\bar{\wp} \colon \mathcal{M} \to \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}$ обязано быть голоморфным — в самом деле, возмем $S = \mathcal{M}$. На самом деле, "голоморфность" в формулировке теоремы Торелли понимается именно в смысле этого обратного утверждения.

Предложение 2.6. *Пусть* $f \colon \mathcal{X} \to S$ *— семейство* $K3$ *поверхностей,* $s_0 \in S$ *— любая точка,* $\mathcal{X}_{s_0} := f^{-1}(s_0)$*, и* $\varphi_0 \colon H^2(\mathcal{X}_{s_0},\mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{} \Lambda$ *— произвольный изоморфизм решеток. Если* S *односвязное, то существует единственное голоморфное отображение* $\wp_{\mathcal{X}} \colon S \to \mathcal{D}$*, такое что*

$$\wp_{\mathcal{X}}(s) \equiv \bar{\wp}(\mathcal{X}_s) \pmod{\mathrm{O}(\Lambda)} \quad \textit{для всех } s\in S \quad \textit{и} \quad \wp_{\mathcal{X}}(s_0) = \wp(\mathcal{X}_{s_0},\varphi_0).$$

Доказательство. Рассмотрим пучок абелевых групп $\mathrm{R}^2 f_*\underline{\mathbb{Z}}$ на S. Так как S односвязно, он изоморфен постоянному пучку со слоем $H^2(\mathcal{X}_{s_0},\mathbb{Z}) \cong \Lambda$, причем изоморфизм

$$\varphi \colon \mathrm{R}^2 f_*\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow[\sim]{} \underline{\Lambda}$$

однозначно определяется, если потребовать чтобы в точке s_0 он совпадал с φ_0. Таким образом, φ — это семейство изоморфизмов $\varphi_s \colon H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{} \Lambda$, которые гладко зависят от s (например, если пользуясь теоремой Эресманна выбрать диффеоморфизм $f^{-1}(U) \cong X\times U$ для достаточно маленькой окрестности $U \subset S$, композиция $H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{} H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{} \Lambda$ для $s \in U$ будет постоянной) и совпадают с φ_0 в точке s_0. Изоморфизм φ индуцирует изоморфизм векторных расслоений

$$\varphi_{\mathcal{O}} \colon \mathrm{R}^2 f_*\underline{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_S = \mathrm{R}^2 f_*\underline{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \cong \mathrm{R}^2 f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_S)) \xrightarrow[\sim]{} \Lambda\otimes\mathcal{O}_S.$$

С другой стороны, у пучка $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ на $\mathcal{X}$ имеется *относительная резольвента де Рама*

$$0 \longrightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{d}_{X/S}} \Omega_{X/S} \xrightarrow{\mathrm{d}_{X/S}} \Omega^2_{X/S} \longrightarrow 0$$

(где $\mathrm{d}_{X/S}$ — относительный (голоморфный) дифференциал де Рама), которая конечно не $\mathcal{O}_X$-линейна, но $\mathcal{O}_S$-линейна, так как $\mathrm{d}_{X/S}(h \circ f) = 0$ для любой голоморфной функции h на S. Отсюда следует, что вложение $\Omega^2_{X/S} \hookrightarrow (\Omega^\bullet_{X/S}, \mathrm{d}_{X/S})$ индуцирует *голоморфный* морфизм расслоений

$$f_*(\Omega^2_{X/S}) \to \mathrm{R}^2 f_*(\Omega^\bullet_{X/S}, \mathrm{d}_{X/S}) = \mathrm{R}^2 f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_S)).$$

Компонируя его с изоморфизмом $\varphi_{\mathcal{O}}$ построенным выше, получаем вложение расслоений

$$f_*(\Omega^2_{X/S}) \to \Lambda \otimes \mathcal{O}_S, \tag{2.7}$$

которое в каждой точке $s \in S$ совпадает с естественным вложением $H^{2,0}(\mathcal{X}_s) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{C})$. По универсальному свойству проективного пространства возникает голоморфное отображение

$$\wp_{\mathcal{X}} \colon S \to \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C}),$$

которое каждую точку $s \in S$ переводит в точку $\wp(\mathcal{X}_s, \varphi_s)$. По построению, оно обладает всеми необходимыми свойствами, а его единственность очевидна. □

Следствие 2.7. *Если $f \colon \mathcal{X} \to S$ — семейство K3 поверхностей над произвольным комплексным многообразием, то найдется накрытие $\pi \colon \tilde{S} \to S$ и голоморфное отображение $\tilde{\wp} \colon \tilde{S} \to \mathcal{D}$ такое что $\tilde{\wp}(\tilde{s}) \equiv \bar{\wp}(\mathcal{X}_{\pi(\tilde{s})}) \pmod{\mathrm{O}(\Lambda)}$ для любой точки $\tilde{s} \in \tilde{S}$.*

Доказательство. В самом деле, достаточно взять универсальное накрытие, рассмотреть над ним индуцированное семейство $\mathcal{X} \times_S \tilde{S} \to \tilde{S}$, выбрать произвольную точку $\tilde{s}_0 \in \tilde{S}_0$ и изоморфизм φ_0, и применить предложение 2.6. □

2.4. **Теорема Торелли для поляризованных K3 поверхностей.** Для алгебраической геометрии наибольший интерес представляют проективные K3 поверхности. Поэтому полезно понимать, какое условие на период влечет проективность.

Предложение 2.8. *K3 поверхность X проективна если и только если существует класс*

$$D \in H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(X) := H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$$

такой что $(D, D) > 0$.

Группа $H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(X)$ называется группой Ходжевых классов. Для K3 поверхности она изоморфна $\mathrm{Pic}(X)$.

Доказательство. Во-первых, по *теореме Лефшеца о $(1,1)$-классах*, всякий Ходжев $(1,1)$-класс представляется первым классом Черна голоморфного линейного расслоения, значит существует $\mathcal{L}$, такое что $\mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = D$. По *теореме Римана–Роха* выполнено

$$\chi(X, \mathcal{L}) = \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{L}) \cdot \mathrm{td}_X) = \deg((1 + D + \tfrac{1}{2}(D, D)\,\mathrm{pt})(1 + 2\,\mathrm{pt})) = \tfrac{1}{2}(D, D) + 2 > 2.$$

Так как $h^{>2}(X, \mathcal{L}) = 0$, получаем $H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$ или $H^2(X, \mathcal{L}) \neq 0$. Но по *двойственности Серра* $H^2(X, \mathcal{L}) \cong H^0(X, \mathcal{L}^{-1})^\vee$, поэтому меняя при необходимости $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^{-1}$ (это соответсвует замене D на $-D$), и пользуясь тем, что $H^0(X, \mathcal{L})$ и $H^0(X, \mathcal{L}^{-1})$ не могут одновременно быть ненулевыми, мы приходим к ситуации, когда $\dim H^0(X, \mathcal{L}) \geq 3$.

Докажем теперь, что подправив класс D, можно сделать его *численно эффективным*, то есть таким, что $(D, C) \geq 0$ для всех кривых $C \subset X$. Для этого разложим D в сумму

$$D = D' + \sum n_i C_i, \qquad n_i > 0,$$

где второе слагаемое — дивизориальная часть общего множества нулей всех (голоморфных) сечений расслоения $\mathcal{L}$ (неподвижная часть D). Так как C_i неподвижна, имеем $\chi(X, \mathcal{O}_X(C_i)) \leq 1$. По теореме Римана–Роха получаем $(C_i, C_i) < 0$, а по формуле присоединения

$$-2 \leq 2g(C_i) - 2 = \deg(K_{C_i}) = (K_X + C_i, C_i) = (C_i, C_i),$$

и так как (C_i, C_i) четно по лемме 2.2, получаем $(C_i, C_i) = -2$. Отсюда следует, что

$$(D - C_i, D - C_i) = (D, D) - 2(D, C_i) + (C_i, C_i) \geq (D, D).$$

Поэтому $D - C_i$ имеет не меньший квадрат, ту же подвижную часть, что и D, и меньшую неподвижную часть. Итерируя аргумент, заключаем, что $(D', D') \geq (D, D)$ и D' не имеет неподвижных компонент. Остается заметить, что если $(D', C) < 0$, то C обязана быть неподвижной компонентой D', что противречит его построению.

Итак, мы построили численно эффективный класс дивизоров D' с $(D', D') > 0$. По *теореме Мори* некоторая его кратность задает отображение $X \to \mathbb{P}^N$, которое стягивает конечное число рациональных кривых, а его образ $\bar{X} \subset \mathbb{P}^N$ — проективная К3 поверхность с *дювалевскими особенностями*. Остается заметить, что поверхность X является минимальным разрешением особенностей проективной поверхности $\bar{X}$, а значит тоже проективна. □

Для каждого вектора $v \in \Lambda$ обозначим

$$\mathcal{D}_v \coloneqq \{\sigma \in \mathcal{D} \mid (\sigma, v) = 0\}.$$

Тогда условие проективности X равносильно условию $\bar{\wp}(X) \in \mathcal{D}_v$ для $v \in \Lambda$ с $(v, v) > 0$. С другой стороны, из теории решеток известно, что для каждого целого положительного числа d множество всех $v \in \Lambda$ с $(v, v) = d$ образует одну орбиту действия группы $\mathrm{O}(\Lambda)$. Выберем в ней представителя v_d (например, $v_d = (1, d) \in \mathrm{U} \subset \Lambda$) и обозначим его стабилизатор через

$$\mathrm{O}(\Lambda, v_d) = \{g \in \mathrm{O}(\Lambda) \mid g(v_d) = v_d)\}.$$

В этих терминах можно сформулировать теорему Торелли для поляризованных К3 поверхностей.

Теорема 2.9. *Отображение*

$$M_d \xrightarrow{\bar{\wp}} \mathrm{O}(\Lambda, v_d)\backslash \left(\mathcal{D}_{v_d} \setminus \bigcup_{(\delta,\delta)=-2} \mathcal{D}_\delta\right)$$

является голоморфным изоморфизмом.

Здесь M_d обозначает (грубое) *многообразие модулей* поляризованных К3 поверхностей степени $2d$. В отличие от теоремы 2.5, обе части имеют естественную структуру квазипроективного многообразия с факторособенностями (*орбифолда*). Для левой части структура возникает из рассмотрения схемы Гильберта фиксированного проективного пространства, а для правой части, из-за того, что действие группы $\mathrm{O}(\Lambda, v_d)$ на области $\mathcal{D}_{v_d}$ является дискретным (в отличии от действия $\mathrm{O}(\Lambda)$ на $\mathcal{D}$), так как положительная часть сигнатуры решетки

$$\Lambda_d \coloneqq v_d^\perp \cong \mathrm{E}_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{U}^{\oplus 2} \oplus (-2d)$$

равна 2. Квазипроективность доказывается *теоремой Бэйли–Бореля.*

Пример 2.10. Конструкции леммы 1.3 и примера 1.6 приводят к описаниям

$$M_2 \cong (\mathbb{P}^{27} \setminus \Delta)/\,\mathrm{PGL}_3, \qquad M_4 \cong (\mathbb{P}^{34} \setminus \Delta)/\,\mathrm{PGL}_4, \qquad M_8 \cong (\mathrm{Gr}(3,21) \setminus \Delta)/\,\mathrm{PGL}_6,$$

где всякий раз $\Delta \subset \mathbb{P}^{34}$ — дискриминантный дивизор, параметризующий особые пересечения.

Вложение решеток $\Lambda_{v_d} \hookrightarrow \Lambda$ индуцирует отображение факторов

$$M_d = \mathrm{O}(\Lambda, v_d)\backslash\mathcal{D}_{v_d} \to \mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}.$$

Его образ всюду плотен в $\mathrm{O}(\Lambda)\backslash\mathcal{D}$.

3. Доказательство теоремы Торелли

Полное доказательство теоремы Торелли весьма сложное, поэтому мы не будем приводить его полностью, а только обозначим основные шаги.

3.1. **Сюръективность отображения периодов.** Важная часть теоремы Торелли — *сюръективность отображения периодов*, то есть построение для каждой точки $\sigma \in \mathcal{D}$ такой К3 поверхности X, что $\bar{\wp}(X) = \sigma$. Один из способов построить такую К3 поверхность — воспользоваться “твисторными прямыми”. Для этого полезно следующее простое наблюдение:

Лемма 3.1. *Пусть $\sigma \in \Lambda \otimes \mathbb{C}$. Положим $\sigma_1 \coloneqq \mathrm{Re}(\sigma)$, $\sigma_2 \coloneqq \mathrm{Im}(\sigma) \in \Lambda \otimes \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sigma \in \mathcal{D} \iff (\sigma_1, \sigma_1) = (\sigma_2, \sigma_2) > 0 \quad \text{и} \quad (\sigma_1, \sigma_2) = 0. \tag{3.1}$$

В частности, подпространство $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subset \Lambda_{\mathbb{R}}$ положительно определено.

Доказательство. Запишем $\sigma = \sigma_1 + \sqrt{-1}\sigma_2$. Тогда

$$(\sigma, \sigma) = (\sigma_1, \sigma_1) - (\sigma_2, \sigma_2) + 2\sqrt{-1}(\sigma_1, \sigma_2), \qquad (\sigma, \bar{\sigma}) = (\sigma_1, \sigma_1) + (\sigma_2, \sigma_2)$$

откуда лемма сразу следует. □

Напомним, что решетка Λ имеет сигнатуру $(3, 19)$, поэтому есть много положительно определеных 3-мерных вещественных подпространств $W \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$. Для каждого из них пересечение

$$\mathrm{T}_W \coloneqq \mathbb{P}(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}$$

является сферой $\mathrm{T}_W \cong \mathrm{S}^2$. В самом деле, из-за положительной определнности ограничение формы пересечения на $W_{\mathbb{C}}$ невырождено, значит пересечение $\mathbb{P}(W_{\mathbb{C}})$ с квадрикой $(\sigma, \sigma) = 0$ является гладкой коникой, и значит изоморфно $\mathbb{CP}^1 \cong \mathrm{S}^2$. При этом для каждой точки σ этого пересечения условие $(\sigma, \bar{\sigma}) > 0$ также выполнено в силу леммы 3.1 из-за положительной определнности W. Множество T_W называется твисторной прямой.

Оказывается, для общей твисторной прямой $\mathrm{T}_W \subset \mathcal{D}$ проходящей через точку $\bar{\wp}(X)$ в образе отображения периодов можно построить голоморфное семейство К3 поверхностей $\mathcal{X}_W \to \mathrm{T}_W$, такое что отображение периодов $\wp \colon \mathrm{T}_W \to \mathcal{D}$ совпадает с естественным вложением. Делается это с помощью *гиперкэлеровой геометрии.*

А именно, пусть $\sigma = \bar{\wp}(X) \in \mathcal{D}$. Умножив σ на константу, можно считать, что $(\sigma, \bar{\sigma}) = 2$. Из леммы 3.1 следует, что $\sigma_1 \coloneqq \mathrm{Re}(\sigma)$ и $\sigma_2 \coloneqq \mathrm{Im}(\sigma)$ лежат в W, причем

$$(\sigma_1, \sigma_1) = (\sigma_2, \sigma_2) = 1 \quad \text{и} \quad (\sigma_1, \sigma_2) = 0.$$

Далее, пусть $\sigma_0 \in W$ выбрано так, что $(\sigma_0, \sigma_1) = (\sigma_0, \sigma_2) = 0$ и $(\sigma_0, \sigma_0) = 1$. Предположим также, что σ_0 не ортогонально ни к каким $\delta \in \Lambda$ с $(\delta, \delta) = -2$. Тогда из *теоремы Яу* следует, что на К3 поверхности X существует кэлерова метрика g, такая что если I — комплексная структура X, то вещественная кэлерова форма $g(I(-), -)$ имеет класс σ_0, а комплексные структуры J и K определяемые из соотношений

$$\sigma_1 = g(J(-), -), \qquad \sigma_2 = g(K(-), -),$$

удовлетворяют кватернионным соотношениям

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1.$$

Такая метрика называется *гиперкэлеровой.*

Теперь для всякой точки $(u, v, w) \in \mathrm{S}^2$ сферы радиуса 1 сумма $uI + vJ + wK$ также является комплексной структурой, для которой метрика g кэлерова. Более того, на произведении $X \times \mathrm{S}^2 = X \times \mathbb{CP}^1$ возникает комплексная структура, в точке $(x, (u, v, w))$ задаваемая оператором $(uI + vJ + wK, I_0)$, где I_0 — стандартная комплексная структура на сфере $\mathrm{S}^2 \cong \mathbb{CP}^2$. Пусть $\mathcal{X}$ — соответствующее

3-мерное комплексное многообразие. Тогда проекция $\mathcal{X} \to \mathrm{S}^2 = \mathbb{CP}^1$ голоморфна, все ее слои являются К3 поверхностями, и можно проверить, что образ отображения $\wp_{\mathcal{X}} \colon \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{D}$ (заметим, что сфера $\mathbb{CP}^1$ односвязна) является твисторной прямой T_W.

Теперь сюръективность отображения периодов вытекает из элементарного утверждения.

Лемма 3.2. *Любые две точки в $\mathcal{D}$ можно соединить цепочкой твисторных прямых.*

Доказательство. Область периодов разбивается на классы эквивалентности точек, которые можно соединить цепочками твисторных прямых. Так как $\mathcal{D}$ связно, достаточно проверить, что каждый класс эквивалентности открыт, то есть вместе с каждой точкой содержит ее окрестность.

Пусть $\sigma \in \mathcal{D}$ точка и пусть как и раньше $\sigma_1 := \mathrm{Re}(\sigma)$, $\sigma_2 := \mathrm{Im}(\sigma)$. В силу леммы 3.1 подпространство $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ положительно определено. Его можно дополнить до 3-мерного положительно определенного пространства $W := \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$. Более того, можно выбрать σ_0 длины 1 так, что оно ортогонально σ_1 и σ_2, но не ортогонально ни к каким $\delta \in \Lambda$ с $(\delta, \delta) = -2$. Ясно, что для всякой точки $\sigma' \in \mathcal{D}$ достаточно близкой к σ пространства

$$W' := \langle \sigma_0, \sigma_1', \sigma_2 \rangle \quad \text{и} \quad W'' := \langle \sigma_0, \sigma_1', \sigma_2' \rangle$$

тоже положительно определены (здесь как обычно $\sigma_1' := \mathrm{Re}(\sigma')$, $\sigma_2' := \mathrm{Im}(\sigma')$). Легко видеть, что растянув σ и повернув и растянув σ' подходящим образом, легко достичь того, что

$$(\sigma_1, \sigma_1) = (\sigma_2, \sigma_2) = (\sigma_0, \sigma_0) = (\sigma_1', \sigma_1') = (\sigma_2', \sigma_2') = 1 \qquad (\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_2, \sigma_0) = (\sigma_0, \sigma_1') = (\sigma_1', \sigma_2') = 0.$$

Тогда в силу леммы 3.1 получаем включения

$$\sigma \in \mathrm{T}_W \ni \sigma_2 + \sqrt{-1}\sigma_0 \in \mathrm{T}_{W'} \ni \sigma_1' + \sqrt{-1}\sigma_0 \in \mathrm{T}_{W''} \ni \sigma'.$$

Таким образом, мы соединили точки σ и σ' цепочкой из трех твисторных прямых. $\square$

3.2. **Инъективность отображения периодов.** Остается доказать следующее утверждение: если К3 поверхности (X_1, φ_1) и (X_2, φ_2) таковы, что

$$\wp(X_1, \varphi_1) = \wp(X_2, \varphi_2),$$

то $X_1 \cong X_2$. Чтобы это сделать, рассмотрим вначале какой-нибудь специальный класс К3 поверхностей, например куммеровы поверхности $X_i = \mathrm{Ku}(T_i)$ (см. пример 1.5).

Лемма 3.3. *К3 поверхность X является куммеровой тогда и только тогда, когда*

$$H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \supset (-2)^{16},$$

где правая часть — решетка $\mathbb{Z}^{16}$ с базисом $e_1, \ldots, e_{16}$, таким что $(e_i, e_j) = -2\delta_{i,j}$.

Доказательство. Если X куммерова, то есть раздутие фактора T/ι тора по инволюции, то классы исключительных дивизоров раздутия порождают требуемую решетку.

Обратно, предположим, что необходимая подрешетка существует. Так как $(e_i, e_i) = -2$, применяя теорему Римана–Роха (как в доказательстве предложения 2.8) заключаем, что класс $\pm e_i$ эффективен. Меняя при необходимоти знаки, получаем 16 гладких рациональных попарно непересекающихся кривых $E_i \subset X$. Пользуясь теорией решеток можно доказать, что элемент $\sum_{i=1}^{16} e_i$ делится в решетке Λ на 2, поэтому найдется класс дивизора D (единственный в силу следствия 1.12), такой что

$$2D = \sum_{i=1}^{16} E_i.$$

Это означает существование двулистного накрытия $\tilde{X} \to X$ разветвленного ровно в $E_1, \ldots, E_{16}$. Если $\tilde{E}_i \subset \tilde{X}$ компонента дивизора ветвления на $\tilde{X}$ над E_i, то $\tilde{E}_i$ — набор из 16 гладких рациональных попарно непересекающихся кривых, таких что $(\tilde{E}_i, \tilde{E}_i) = -1$. По *теореме Кастельнуово* найдется стягивание $\tilde{X} \to T$ этих кривых на гладкую поверхность T. Теперь несложно проверить, что поверхность T — тор и $X \cong \mathrm{Ku}(T)$. $\square$

Следующий шаг — описание структуры Ходжа тора T в терминах структуры Ходжа X. Пользуясь диаграммой (1.2), можно проверить следующее: если $\Lambda_0 = (-2)^{16} \subset H^2(\mathrm{Ku}(T), \mathbb{Z})$, то

$$H^2(T, \mathbb{Z}) = \Lambda_0^{\perp} \subset H^2(\mathrm{Ku}(T), \mathbb{Z}), \tag{3.2}$$

как абелева группа, а форма пересечения T равна половине ограничения формы пересечения X. В частности, $\Lambda_0^{\perp} \cong \mathrm{U}(2)^{\oplus 3}$. Наконец, структура Ходжа T индуцируется структурой Ходжа X:

$$H^{p,q}(T) = \Lambda_0^{\perp} \cap H^{p,q}(\mathrm{Ku}(T)).$$

Отсюда получается

Следствие 3.4. *Если K3 поверхности (X_1, φ_1) и (X_2, φ_2) таковы, что*

$$\wp(X_1, \varphi_1) = \wp(X_2, \varphi_2)$$

и $\wp(X_i, \varphi_i)^{\perp}$ содержит подрешетку Λ_0, то $(X_i, \varphi_i) = \mathrm{Ku}(T_i, \tau_i)$ для двух комплексных торов T_1 и T_2 и двух изоморфзимов $\tau_i \colon H^2(T_i, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{U}^{\oplus 3}$, причем так, что

$$\wp_{\mathrm{T}}(T_1, \tau_1) = \wp_{\mathrm{T}}(T_2, \tau_2),$$

где $\wp_{\mathrm{T}}$ обозначает отображение периодов для комплексных торов.

Применяя теорему Торелли для комплексных торов (которая гораздо проще), получаем изоморфизм $T_1 \cong T_2$, откуда следует, что

$$X_1 \cong \mathrm{Ku}(T_1) \cong \mathrm{Ku}(T_2) \cong X_2.$$

Тем самым теорема Торелли для куммеровых поверхностей доказана.

Замечание 3.5. В этом месте спрятана тонкость. Классическая теорема Торелли для торов говорит, что комплексный тор T однозначно восстанавливается по структуре Ходжа на $H^1(T, \mathbb{Z})$. Чтобы применить ее, надо восстановить структуру Ходжа на $H^1(T, \mathbb{Z})$ по струтуре Ходжа на $H^2(T, \mathbb{Z})$. Легко видеть, что

$$H^2(T, \mathbb{Z}) = \wedge^2 H^1(T, \mathbb{Z}), \qquad H^{2,0}(T) = \wedge^2 H^{1,0}(T).$$

Эти формулы показывают, что на самом деле есть две структуры Ходжа веса 1, приводящие к одной и той же структуре Ходжа веса 2 — это структуры Ходжа тора T и *двойственного тора* $T^{\vee}$. Однако, информация, необходимая для того, чтобы выделить из них "правильную" структуру Ходжа содержится в "дискриминантной группе" решетки $2 \cdot H^2(T, \mathbb{Z})$, которая в силу изоморфизма (3.2) равна дискриминантной группе (насыщения) решетки Λ_0 и может быть извлечена из вложения

$$2 \cdot H^2(T, \mathbb{Z}) \oplus \Lambda_0 \subset H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Это довольно несложное замечание, но оно выходит за рамки нашего обсуждения.

Наконец, пусть (X_1, φ_1) и (X_2, φ_2) — произвольная пара K3 поверхностей с $\wp(X_1, \varphi_1) = \wp(X_2, \varphi_2)$. Рассмотрим *версальные деформации* $\mathcal{X}_1 \to S_1$ и $\mathcal{X}_2 \to S_2$, то есть такие семейства K3 поверхностей над односвязными базами S_1 и S_2 (например, над дисками), что

$$\mathcal{X}_{1, s_{0,1}} \cong X_1 \quad \text{и} \quad \mathcal{X}_{2, s_{0,2}} \cong X_2$$

(для отмеченных точек $s_{0,i} \in S_i$), а дифференциалы отображений периодов

$$\wp_{\mathcal{X}_1} \colon S_1 \to \mathcal{D} \quad \text{и} \quad \wp_{\mathcal{X}_2} \colon S_2 \to \mathcal{D}$$

в точках $s_{i,0}$ являются изоморфизмами. По теореме об обратной функции, сужая при необходимости семейста, можно считать, что отображения являются вложениями; в частности, эти семейства являются версальными деформациями для любых точек $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$. Более того,

$$\wp_{\mathcal{X}_1}(s_{1,0}) = \wp(X_1, \varphi_1) = \wp(X_2, \varphi_2) = \wp_{\mathcal{X}_2}(s_{2,0}),$$

поэтому можно считать, что отображения задают изоморфизмы

$$\wp_{\mathcal{X}_1} \colon S_1 \xrightarrow[\sim]{} U \xleftarrow[\sim]{} S_2 \colon \wp_{\mathcal{X}_2}$$

на одно и тоже открытое подмножество $U \subset \mathcal{D}$. Далее замечаем, что подмножество в $\mathcal{D}$ соответствующие куммеровым K3 поверхностям всюду плотно, в частности оно плотно и в U, а значит для плотного множества точек $u \in U$ мы можем применить теорему Торелли для куммеровых поверхностей и заключить, что

$$\mathcal{X}_{1,\wp_1^{-1}(u)} \cong \mathcal{X}_{2,\wp_2^{-1}(u)}. \tag{3.3}$$

Так как наши семейства являются версальными деформациями каждой точки, такой же изоморфизм имеется и для всех близких $u \in U$. Значит множество точек в U, для которых выполнено (3.3) открыто и плотно. Остается заметить, что ввиду следующей леммы это множество также замкнуто, значит равно всему U, и следовательно K3 поверхности $X_1 \cong \mathcal{X}_{1,s_{0,1}}$ и $X_2 \cong \mathcal{X}_{2,s_{0,2}}$ изоморфны.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathcal{X}_1 \to S$ и $\mathcal{X}_2 \to S$ — два семейства K3 поверхностей, так что*

$$\mathcal{X}_{1,s} \cong \mathcal{X}_{2,s}.$$

для всех $s \neq s_0$. Тогда $\mathcal{X}_{1,s_0} \cong \mathcal{X}_{2,s_0}$.

Доказательство. Пусть $Z \subset (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2) \times_{S \times S} (S \setminus \{s_0\})$ — график семейства изоморфизмов. Рассмотрим его замыкание $\bar{Z} \subset \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ и его центральный слой

$$Z_0 \coloneqq \bar{Z} \cap (\mathcal{X}_{1,s_0} \times \mathcal{X}_{2,s_0}).$$

Так как $[Z_s] \in H^4(\mathcal{X}_{1,s} \times \mathcal{X}_{2,s}, \mathbb{Z})$ задает изоморфизм $H^2(\mathcal{X}_{1,s}, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathcal{X}_{2,s}, \mathbb{Z})$ для всех $s \neq s_0$, то

$$[Z_0] \colon H^2(\mathcal{X}_{1,s_0}, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathcal{X}_{2,s_0}, \mathbb{Z})$$

тоже изофорфизм, значит Z_0 содердит единственную неприводимую компоненту Z_{00}, такую что оба отображения $Z_{00} \to \mathcal{X}_{i,s_0}$ бирациональны. Но тогда $\mathcal{X}_{1,s_0}$ бирациональна $\mathcal{X}_{2,s_0}$, поэтому получается из $\mathcal{X}_{2,s_0}$ последовательностью раздутий и стягиваний точек. Но исключительные дивизор цепочки таких раздутий — дерево из рациональных (-1)-кривых, при стягиваниях они могли бы стать гладкими рациональными кривыми с квадратом ≥ -1, но по формуле присоединения таких кривых нет на K3 поверхности, поэтому $\mathcal{X}_{1,s_0} \cong \mathcal{X}_{2,s_0}$. □

Стоит также упомянуть два интересных следствия теоремы Торелли.

Следствие 3.7. *Все K3 поверхности диффеоморфны.*

Доказательство. Это следствие глобальной теоремы Торелли, связности области периодов, и теоремы Эресмана. □

Следствие 3.8. *Любая K3 поверхность X односвязна, то есть $\pi_1(X) = 0$.*

Доказательство. Так как все K3 поверхности диффеоморфны, достаточно заметить, что все квартики из леммы 1.3 односвязны по теореме Лефшеца. □