УДК 512

БОНДАЛ А. И.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР И КОГЕРЕНТНЫЕ ПУЧКИ

1. Введение. Целью этой работы является изучение взаимосвязей различных категорий с категориями представлений конечномерных ассоциативных алгебр. Основным инструментом является понятие исключительных наборов или, в более общей ситуации, полуортогонального набора допустимых подкатегорий.

Пусть E — исключительный объект некоторой абелевой категории $\mathcal{A}$. Это означает, что $\mathrm{Ext}^i(E, E)=0$ при $i>0$. Тогда с помощью E можно построить функтор F_E из категории $\mathcal{A}$ в производную категорию $D^b(\text{mod-}A)$ представлений алгебры $A=\mathrm{Hom}(E, E)$:

$$F_E(M)=\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(E, M),$$

$F_E(M)$ является комплексом правых A-модулей. Функтор F можно продолжить до производного функтора D^bF из $D^b\mathcal{A}$ в $D^b(\text{mod-}A)$. Если в E достаточно много прямых слагаемых, то D^bF_E оказывается эквивалентностью триангулированных категорий (теорема 6.2).

В качестве $\mathcal{A}$ можно рассмотреть категорию $\mathrm{Sh}(\mathbf{P}^n)$ когерентных пучков на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$. В работе [1] А. А. Бейлинсон показал, что если положить $E_0=\bigoplus_{i=0}^{n}\mathcal{O}(i)$, то $D^bF_{E_0}$ — эквивалентность категорий. Затем, Дж.-М. Дрезе [9], А. Л. Городенцев и А. Н. Рудаков [8] построили целую серию исключительных расслоений, которые получаются последовательными перестройками расслоения E_0. При этом E_0 удобнее воспринимать как целый исключительный набор расслоений $\mathcal{O}(i)$, а в понятие исключительного объекта ввести условие простоты: $\mathrm{Hom}(E, E)=\mathbf{C}$. Тогда перестройки внутри набора интерпретируются как действие группы кос Артина. М. М. Капранов построил исключительные наборы на квадриках, грассманианах и многообразиях флагов [12].

Другой пример исключительного набора — это проективные модули над конечномерной ассоциативной алгеброй. Перестройки такого набора обобщают функторы отражения [4] и опрокидывающие модули [5], которые используются в теории представлений колчанов.

С точки зрения теории колчанов исследование исключительных объектов можно мотивировать следующим образом. Эта теория занимается классификацией конечномерных ассоциативных алгебр с ручной теорией представлений. Однако ручные алгебры образуют маленький островок в океане диких алгебр. Что же делать с дикими алгебрами? Во-первых, попытаться описать все простые неварьируемые представления. Среди них важное место с общефункторной точки зрения занимают исключительные объекты. Во-вторых, разбить множество алгебр (или, более общо, дифференциально-градуированных алгебр) на классы в зависимости от свойств перестраиваемости исключительных наборов. В-третьих, определить понятие стабильности представления алгебры и расклассифицировать стабильные модули. Аналогия с теорией пучков на $\mathbf{P}^n$ показывает сложность последней задачи.

Свойство исключительности набора так, как оно определяется в [8], не сохраняется, вообще говоря, при перестройках. Поэтому его необходимо ослабить. В таком виде оно успешно используется в любой триангулированной категории.

Если $i_* : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ — вложение подкатегории, порожденной элементами исключительного набора, в основную категорию, то, как будет показано (теорема 3.2), категория $\mathscr{B}$ является допустимой, т. е. существуют правый и левый сопряженные функторы $i^!$, i^*. Эти функторы обобщают резольвенту Бейлинсона [14] и являются вариантом Bar-конструкции [12].

В работе [8] замечено, что перестройки исключительного набора порождают спираль. Теорема 4.1 показывает, что это связано с полнотой исключительного набора. Отметим, что при отождествлении производных категорий когерентных пучков на многообразии и модулей над алгеброй функтор подкрутки на канонический класс переходит в производный функтор Накаямы, или, как его еще называют в теории колчанов, в функтор Кокстера.

Далее на некоторых примерах демонстрируется, как осуществляется связь между геометрией и алгеброй. Так, например, пучкам на $\mathbf{P}^1$ соответствуют представления колчана, состоящего из двух вершин и двух стрелок из одной вершины в другую. Как известно, это ручной колчан, и его представления описаны еще Кронекером. Единственный параметр, от которого зависят неразложимые представления, и есть параметр на проективной прямой.

В п. 7 определяется кошулевость алгебры с упорядоченными проективными объектами и доказывается эквивалентность кошулевости и сильной исключительности двойственного набора, который строится перестройками проективных модулей и состоит из неприводимых объектов, сдвинутых по производной категории.

В п. 8, с чисто алгебраической точки зрения, исследуется вопрос о сохранении свойства сильной исключительности при перестройках. Ограничения, которые необходимо наложить, есть некоторые гомологические условия на алгебру гомоморфизмов между элементами исключительного набора. Алгебры, удовлетворяющие этим условиям, мы называем самосогласованными. Их самостоятельное изучение, по-видимому, представляет значительный интерес.

Наконец, в п. 9 доказывается, что геометрия доставляет примеры самосогласованных алгебр.

В заключение отметим интересную связь вышеизложенного с теорией извращенных пучков. Если стратификация многообразия такова, что все страты стягиваемы [13], то триангулированная категория комплексов с гомологиями, локально постоянными на стратах, обладает полным исключительным набором. Используя известное соответствие пучков, подчиненных стратификации клетками Шуберта многообразия флагов с модулями над полупростой алгеброй Ли, получаем исключительный набор в категории $\mathcal{O}$ [2], состоящий из модулей Верма.

Работа посвящается А. Гротендику, к его 60-летию.

2. Исключительные наборы и перестройки. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая триангулированная категория [6]; A и B — объекты $\mathcal{A}$; $\mathrm{Hom}(A, B)$ — векторное пространство над полем K. Введем обозначение для градуированного комплекса K-векторных пространств с тривиальным дифференциалом:

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(A, B)=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathrm{Hom}^{k}_{\mathcal{A}}(A, B)[-k],$$

здесь $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}{}^{k}(A, B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, T^{k}B)$, где T — сдвиг в триангулированной категории $\mathcal{A}$, а число в квадратных скобках означает, что пространство $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, T^{k}B)$ имеет градуировку, равную k.

В случае, когда $\mathcal{A}$ — производная категория от некоторой абелевой категории, $\mathrm{Hom}^{\bullet}(A, B)$ квазиизоморфен комплексу $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(A, B)$.

Определение. *Исключительным объектом* называется объект E, удовлетворяющий условиям

$$\mathrm{Hom}^{i}(E, E)=0 \text{ при } i\neq 0, \quad \mathrm{Hom}(E, E)=K.$$

Определение. *Исключительным набором в* $\mathcal{A}$ называется упорядоченный набор исключительных объектов $(E_0, \ldots, E_n)$, удовлетворяющий условию

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(E_j, E_k)=0 \text{ при } j>k.$$

Исключительный набор из двух объектов мы будем называть *исключительной парой.*

В работе [8] были определены перестройки исключительных наборов пучков на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$. Естественным обобщением на случай произвольных триангулированных категорий является следующее

Определение. Пусть (E, F) — исключительная пара. Определим объекты L_EF и R_FE с помощью отмеченных треугольников в категории $\mathcal{A}$:

$$\begin{gathered} L_EF\to\mathrm{Hom}^{\bullet}(E, F)\otimes E\to F, \\ E\to\mathrm{Hom}^{\bullet}(E, F)^{*}\otimes F\to R_FE, \end{gathered} \tag{1}$$

здесь $V[k]\otimes E$, где V — векторное пространство, обозначает объект, который является прямой суммой $\dim V$ экземпляров объекта T^kE. При сопряжении векторных пространств градуировка меняет знак. *Левой* (соответственно *правой*) перестройкой исключительной пары $\tau=(E, F)$ называется пара $L_E\tau=(LF, E)$ (соответственно пара $R_E\tau=(F, RE)$). Нижние индексы всегда будут опускаться, если это не вызывает недоразумений.

Перестройка исключительного набора $\sigma=(E_0, \ldots, E_n)$ определяется как перестройка пары соседних объектов в этом наборе:

$$\begin{gathered} R_i\sigma=(E_0, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, R_{E_{i+1}}E_i, E_{i+2}, \ldots, E_n), \\ L_i\sigma=(E_0, \ldots, E_{i-1}, L_{E_i}E_{i+1}, E_i, E_{i+2}, \ldots, E_n). \end{gathered} \tag{2}$$

Объект $R_{E_{i+1}}E_i$ удобно воспринимать как перенос E_i направо в наборе $\sigma=(E_0, \ldots, E_n)$. В перестроенном наборе $R_{i+1}\sigma$ опять можно делать перестройки. В частности, переносить $R_{i+1}E_i$ дальше направо. Результат многократного переноса объекта E_i в наборе σ будем обозначать $R_\sigma{}^kE_i$, а получившийся набор — $R_i{}^k\sigma$. Аналогично для левых перестроек.

Утверждение 2.1. *Перестройка исключительного набора есть исключительный набор.*

Доказательство аналогично приведенному в работе [7], с заменой $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ на $\mathrm{Hom}^{\bullet}$.

Пусть $(X_0, \ldots, X_n)$ — набор объектов в $\mathcal{A}$. Обозначим через $\langle X_0, \ldots, X_n\rangle$ минимальную полную триангулированную подкатегорию, содержащую объекты X_i. Будем говорить, что набор объектов $(X_0, \ldots, X_n)$ *порождает категорию* $\mathcal{A}$, если $\langle X_0, \ldots, X_n\rangle$ совпадает с $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 2.2. *Если исключительный набор* $(E_0, \ldots, E_n)$ *порождает категорию* $\mathcal{A}$, *то перестроенный набор также порождает* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}=\langle E_0, \ldots, E_n\rangle$ и $\mathcal{B}=\langle E_0, \ldots, E_{i+1}, RE_i, \ldots, E_n\rangle$. $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1})^*\otimes E_{i+1}$ принадлежит $\mathcal{A}$, так как $\mathcal{A}$ замкнута относительно прямых сумм и сдвигов. Отсюда по формуле (1) $RE_i\in\mathcal{A}$ и, значит, $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$. Аналогично можно получить, что $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$, ввиду того, что набор $(E_0, \ldots, E_n)$ получается из $(E_0, \ldots, E_{i+1}, RE_i, \ldots, E_n)$ левой перестройкой в паре (E_{i+1}, RE_i).

Рассмотрим R_i и L_i $(i=0, \ldots, n-1)$ как операции на множестве исключительных наборов.

Утверждение 2.3. а) R_i *и* L_i *обратны друг другу*: $R_iL_i=1$.

б) R_i (*соответственно* L_i) *задают действие группы кос от n нитей*:

$$R_iR_{i+1}R_i=R_{i+1}R_iR_{i+1}, \quad L_iL_{i+1}L_i=L_{i+1}L_iL_{i+1}.$$

Доказательство. В п. а), по существу, надо показать, что если (E, F) — исключительная пара, то $R_EL_EF=F$, а в п. б), что если (E, F, G) — исключительная тройка, то результат правого переноса E последовательно через F и G эквивалентен переносу через G и R_GF. В таком виде эти утверждения доказаны в работе [7]. Ниже будет дано другое доказательство этого утверждения, основанное на перестройках категорий.

3. Перестройки категорий. Этот пункт посвящен изложению более общего подхода к понятию перестроек, не связанного непосредственно с исключительными наборами. Однако функториальность конструкций будет использоваться в дальнейшем для исключительных наборов.

Для наглядного представления определим перестройки в следующей ситуации. Предположим, что V — векторное пространство над K с невырожденной (несимметричной) билинейной формой χ. Рассмотрим на V градуировку: $V=\oplus V_i$ $(i=0, \ldots, n)$ — с условием $\chi(V_j, V_i)=0$ при $j>i$, а ограничение χ на V_i невырождено. Перестройка — это замена градуировки V_i на новую градуировку V_i', где изменяются только две градуировочных компоненты: $V_i'=V_{i+1}$, $V'_{i+1}={}^{\perp}V_{i+1}\cap V_i\oplus V_{i+1}$, где ${}^{\perp}V_{i+1}$ — левый ортогонал к V_{i+1}, т. е. $x\in{}^{\perp}V_{i+1}\Leftrightarrow\chi(x, V_{i+1})=0$. Условия на градуировку при этом сохранятся. Гомоморфизм π, являющийся композицией $\pi=p\circ h$:

$$V_i\oplus V_{i+1}\overset{h}{\cong}V'_{i+1}\oplus V_{i+1}\overset{p}{\to}V'_{i+1},$$

при ограничении на V_i дает изоморфизм пространств с билинейной формой $V_i\overset{\pi}{\cong}V'_{i+1}$. Перестройкой вектора из V_i назовем его образ при этом изоморфизме.

Теперь мы хотим заменить пространство V на триангулированную категорию $\mathcal{A}$, V_i — на подкатегории $\mathcal{A}_i$, а форму χ — на $\mathrm{Hom}^{\bullet}(?, ?)$.

Определение. Две триангулированные подкатегории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в триангулированной категории $\mathcal{A}$ называются *ортогональными*, если для любых объектов $X \in \mathcal{B}$ и $Y \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$.

Определение. Пусть $\mathcal{B}$ — триангулированная подкатегория в $\mathcal{A}$. Полная подкатегория, порожденная объектами $Y \in \mathcal{A}$ такими, что для любого $X \in \mathcal{B}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, называется *правым ортогоналом* к $\mathcal{B}$ и обозначается $\mathcal{B}^{\perp}$. Аналогично определяется левый ортогонал.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\perp}$. Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *$\mathcal{A}$ порождена $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$*;

б) *для любого $X \in \mathcal{A}$ существует отмеченный треугольник $B \to X \to C$, где $B \in \mathcal{B}$ и $C \in \mathcal{C}$*;

в) *для функтора вложения $i_* : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ существует правый сопряженный функтор $i^! : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, т. е. для любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*B, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!A);$$

г) *для функтора вложения $j_* : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ существует левый сопряженный функтор $j^* : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, т. е. для любых $A \in \mathcal{A}$ и $C \in \mathcal{C}$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, j_*C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(j^*A, C).$$

Доказательство. Эквивалентность в) и г) доказана в [6]. Предположим, что выполнено в). Пусть α: $i^!X \to X$ — образ тождественного морфизма $\mathrm{id}_{i^!X}$ при изоморфизме

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(i^!X, i^!X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i^!X, X),$$

входящем в определение сопряженного функтора (для простоты обозначений мы отождествляем объекты $B \in \mathcal{B}$ и $i_*B \in \mathcal{A}$). Вложим α в отмеченный треугольник

$$i^!X \xrightarrow{\alpha} X \to C.$$

Объект $i^!X$ принадлежит $\mathcal{B}$. Следовательно, чтобы показать, что из в) следует б), необходимо убедиться, что $C \in \mathcal{C}$. Пусть $B \in \mathcal{B}$, применим к полученному треугольнику функтор $\mathrm{Hom}(B, ?)$. Получим длинную точную последовательность:

$$\to \mathrm{Hom}(B, i^!X) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}^1(B, i^!X) \xrightarrow{\alpha_*[1]} .$$

Из сопряженности функторов $i^!$ и i_* следует наличие изоморфизмов $\mathrm{Hom}(B, i^!X) \simeq \mathrm{Hom}(B, X)$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $\forall X \in \mathcal{A}$. Применяя свойство функториальности этих изоморфизмов по второму аргументу к морфизму α, получаем, что эти изоморфизмы совпадают с α_*; $\alpha_*[1]$ есть изоморфизм того же типа, что и α_*, только для объекта $X[1]$. Итак, α_* и $\alpha_*[1]$ — изоморфизмы. Тогда описанная выше точная последовательность дает $\mathrm{Hom}(B, C) = 0$ и, следовательно, $C \in \mathcal{C}$.

Теперь покажем, что из б) следует в). Пусть $X \in \mathcal{A}$, тогда имеем треугольник $B \to X \to C$. Положим $i^!X = B$. Покажем, что такой треугольник единственный с точностью до единственного изоморфизма и сопоставление продолжается до функтора. Пусть $B' \to X' \to C'$ — другой такой треугольник и $f : X' \to X$ — морфизм. Покажем, что существует единственный $\psi : B' \to B$, делающий коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & X \arrow[r] & C \\ B' \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & X' \arrow[u, "f"] \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

Применяя функтор $\mathrm{Hom}(B', ?)$ к первому треугольнику и учитывая, что $\mathrm{Hom}^{\bullet}(B', C)=0$, видим, что $\mathrm{Hom}(B', B)=\mathrm{Hom}(B', X)$. Тогда ψ — это прообраз $f\circ g$ при этом изоморфизме. Это доказывает, что соответствие однозначно продолжается до функтора. Если в диаграмме положить $X'=X$ и если f — тождественный морфизм, то получаем в качестве ψ единственный изоморфизм. Это дает корректность определения функтора на объектах. Аналогично доказывается существование единственного морфизма $C'\to C$.

Что из б) следует а) — очевидно. Чтобы убедиться в обратном, надо проверить, что полная подкатегория, порожденная объектами X, которые включаются в отмеченный треугольник $B\to X\to C$, замкнута относительно сдвигов и операции взятия конусов морфизмов. Для сдвинутого объекта $X[i]$ имеем треугольник $B[i]\to X[i]\to C[i]$, где $B[i]\in\mathscr{B}$ и $C[i]\in\mathscr{C}$, так как $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — триангулированные подкатегории. Пусть $f: X\to X'$ — морфизм объектов интересующего нас вида. Тогда, как было показано выше, имеем следующую коммутативную диаграмму, которая единственна с точностью до единственного изоморфизма:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] & C' \arrow[r] & C_\varphi \\ X \arrow[u] \arrow[r, "f"] & X' \arrow[u] \arrow[r] & C_f \\ B \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & B' \arrow[u] \arrow[r] & C_\psi \end{tikzcd}$$

где C_h обозначает конус морфизма h; C и $C'\in\mathscr{C}$, B и $B'\in\mathscr{B}$. Эта диаграмма по обобщенной аксиоме октаэдра [3, с. 24] замыкается с помощью отмеченного треугольника в последнем столбце. Этот треугольник и является искомым. Рассуждения такого типа используются в [3] для работы с t-структурами.

Определение. *Допустимой подкатегорией $\mathscr{B}$ в $\mathscr{A}$* называется категория, имеющая правый и левый сопряженные функторы к функтору вложения $i_*: \mathscr{B}\to\mathscr{A}$, которые мы будем обозначать соответственно $i^!$ и i^*.

Положим $\mathscr{C}=\mathscr{B}^{\perp}$, $R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}={}^{\perp}\mathscr{B}$. Тогда, согласно лемме 3.1, функторы вложения $j_*: \mathscr{C}\to\mathscr{A}$ и $j_!=r_*: R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}\to\mathscr{A}$ имеют соответственно левый и правый сопряженные функторы. Обозначим их $j^*: \mathscr{A}\to\mathscr{C}$ и $r^!: \mathscr{A}\to R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}$. Ограничивая j^* на $R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}$, получаем эквивалентность категорий $R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}$, так как обратным функтором будет $r^!$, ограниченный на $\mathscr{C}$.

Определение. Категория $R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}$ вместе с функтором $R_{\mathscr{B}}=r^!|_{\mathscr{C}}$, $R_{\mathscr{B}}: \mathscr{C}\to R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}$, осуществляющем переход от правого ортогонала допустимой категории $\mathscr{B}$ к левому, называется *правой перестройкой $\mathscr{C}$ через $\mathscr{B}$.*

Аналогично, функтор $l_{\mathscr{B}}=j^*|_{R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}}$, осуществляющий переход от левого ортогонала к правому, называется *левой перестройкой $R_{\mathscr{B}}\mathscr{C}$ через $\mathscr{B}$.*

Пусть X — топологическое пространство с пучком колец $\mathscr{O}$, U — открытое подмножество в X, F — замкнутое дополнение к U. Пусть i и j — морфизмы вложения, $i: F\to X$ и $j: U\to X$. Обозначим, кроме того, $\mathscr{A}=D^+(X, \mathscr{O})$, $\mathscr{B}=D^+(F, \mathscr{O})$, $\mathscr{C}=D^+(U, \mathscr{O})$ — производные категории пучков $\mathscr{O}$-модулей над X, F и U соответственно. Тогда $\mathscr{B}$ является примером допустимой подкатегории в $\mathscr{A}$, а $\mathscr{C}$ является ортогональным дополнением. Соответствующие функторы описаны в [3, п. 1.4], требования допустимости вложения $\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ эквивалентны данным склейки [3, 1.4.3.1—1.4.3.5], обозначения согласованы.

ТЕОРЕМА 3.2.а) *Пусть* $\mathscr{B}=\langle E_0, \ldots, E_n\rangle$ — *подкатегория в* $\mathscr{A}$, *порожденная исключительным набором. Тогда* $\mathscr{B}$ — *допустимая подкатегория в* $\mathscr{A}$.

б) *Положим* $\mathscr{C}=\mathscr{B}^{\perp}$, *тогда* $j^*X=L^{n+1}X[n+1]$, *где* $L^{n+1}X$ *определяется по индукции*:

$$L^0X=X,$$
$$L^{k+1}X\to \mathrm{Hom}^{\cdot}(E_{n-k}, L^kX)\otimes E_{n-k}\to L^kX\xrightarrow{\alpha} L^{k+1}X[1]. \tag{3}$$

Обозначение согласовано с тем, которое принято для перестроек.

Доказательство. Из (3) легко следует по индукции, что $L^{n+1}X\subset\mathscr{C}$. Согласно лемме 3.1 надо убедиться в том, что любой объект $X\in\mathscr{A}$ включается в треугольник:

$$B\to X\to L^{n+1}X[n+1], \text{ где } B\in\mathscr{B}. \tag{4}$$

Докажем это индукцией по длине набора. При $n=-1$ утверждение очевидно. Пусть для набора $(E_1, \ldots, E_n)$ утверждение уже доказано. Проверим его для набора $(E_0, \ldots, E_n)$. Для любого $X\in\mathscr{A}$ имеем

$$L^nX[n-1]\to B_0\to X\xrightarrow{\beta} L^nX[n], \tag{5}$$

где $B_0\in\langle E_1, \ldots, E_n\rangle$. Пусть $\gamma=\alpha[n]\circ\beta$, где α — морфизм из треугольника (3), β — из (5). Тогда имеем коммутативную диаграмму [3, с. 24]:

$$\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Phi[1] \\
B \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u] \arrow[r, "\gamma"] & L^{n+1}X[n+1] \arrow[u] \\
B_0 \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\beta"] & L^nX[n] \arrow[u, "d[n]"']
\end{tikzcd}$$

Так как B_0 и Φ принадлежат $\mathscr{B}$, средняя строка диаграммы есть треугольник вида (4).

Пусть $\mathscr{A}_k$, где $k=0, \ldots, n$,— набор допустимых подкатегорий категории $\mathscr{A}$ такой, что $\mathscr{A}_i\cap\mathscr{A}_j=0$ при $i\neq j$, $\mathrm{Hom}(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_k)=0$ при $i>k$ и $\mathscr{A}_k$ в совокупности порождают категорию $\mathscr{A}$. Перестройки такого набора определяются в полной аналогии со случаем пространства с несимметричной билинейной формой. Пример такого набора категорий согласно теореме 3.2 можно получить из исключительных наборов. Для этого набор $(E_0, \ldots, E_n)$ надо разбить на последовательные отрезки и рассмотреть категории, порожденные исключительными объектами, входящими в один отрезок. Если $\mathscr{B}=\langle E_i, \ldots, E_j\rangle$, где $j-i=k$,— категория, порожденная элементами отрезка, и E — исключительный объект из набора, причем $E\in{}^{\perp}\mathscr{B}$ (т. е. E лежит правее E_j в наборе), то определение L^kE по формуле (3) согласуется с определением, описанным в п. 2, т. е. кратный левый перенос исключительного объекта через исключительный набор $(E_i, \ldots, E_j)$ является перестройкой $L_{\mathscr{B}}E$ этого объекта через подкатегорию, порожденную объектами $(E_i, \ldots, E_j)$. Эта перестройка не зависит от того, какой порождающий набор категории $\mathscr{B}$ выбран, что дает доказательство утверждения 2.3.

Функтор перестройки $L_{\mathscr{B}}$ является эквивалентностью категорий, поэтому если исходная категория порождалась исключительным набором, то и перестроенная категория будет таковой, а следовательно, допустимой. Это позволяет итерировать перестройки таких категорий.

Можно значительно расширить класс допустимых категорий, сохраняющих это свойство при перестройках, используя формализм двойственности Серра, однако нам это в дальнейшем не понадобится.

4. Спирали. В качестве триангулированной категории $\mathscr{A}$ интересно рассмотреть производную категорию $D^b(\mathrm{Sh}(X))$ категории когерентных пучков на многообразии X. Примером исключительного набора на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ является набор пучков $\mathcal{O}(i)$, $i=0, 1, \ldots, n$. Перестройки этого набора изучались в работе [8].

Пусть $(E_0, \ldots, E_n)$ — исключительный набор. Распространим его до бесконечной в обе стороны последовательности $(E_i,\ i=-\infty, \ldots, +\infty)$ объектов $\mathscr{A}$, определив по индукции:

$$E_{n+i}=R^nE_{i-1}, \quad E_{-i}=L^nE_{n-i+1}, \text{ где } i>0. \tag{6}$$

В работе [8] было показано, что исключительные наборы расслоений на $\mathbf{P}^m$, построенные перестройками из набора $\{\mathcal{O}(i)\}$, обладают следующим свойством:

$$E_i=E_{i+m+1}(K), \text{ где } E_i, \quad i=-\infty, \ldots, +\infty,$$

понимаются в указанном выше смысле.

Такая бесконечная последовательность была названа там спиралью. Распространим это определение на произвольное многообразие.

Определение. Бесконечная в обе стороны последовательность E_i объектов производной категории $D^b(\mathrm{Sh}(X))$ когерентных пучков на многообразии X размерности m называется *спиралью периода n*, если

$$E_i=E_{i+n}\otimes K[m-n+1].$$

Здесь K — канонический класс, а число в квадратных скобках обозначает кратность сдвига объекта налево как градуированного комплекса в $D^b(\mathrm{Sh}(X))$.

В случае проективного пространства $\mathbf{P}^m$ период n равен $m+1$ и сдвига в производной категории не происходит. Для квадрики Q^m, в зависимости от четности размерности,— либо сдвиг на один вправо (если m четно), либо сдвига нет (m нечетно).

А. Бейлинсон показал с помощью резольвенты диагонали, что набор $\mathcal{O}(i)$ порождает категорию $D^b(\mathrm{Sh}(\mathbf{P}^n))$, а Дрезе, А. Городенцев и А. Н. Рудаков — что это верно и для перестроенных наборов.

Определение. Исключительный набор называется *витком спирали*, если последовательность, построенная по формулам (6), является спиралью периода $n+1$.

Р. Г. Суон [17] построил исключительные наборы на квадриках, а М. Капранов на грассманианах, квадриках (независимо), многообразиях флагов [11, 12]. Здесь будет показано, что эти наборы также являются витками спирали.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $(E_0, \ldots, E_n)$ — исключительный набор расслоений на многообразии X размерности m с обильным антиканоническим классом. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Набор E_i порождает производную категорию $D^b(\mathrm{Sh}(X))$.*

2) *Набор E_i является витком спирали.*

Предварительно докажем

Утверждение 4.2. *Функтор $\mathrm{Hom}(E_n, ?)^*$ представим в подкатегории $\langle E_0, \ldots, E_n\rangle$, порожденной объектами E_i, и представляющим объек-*

том является $L^nE_n[n]$, т. е.

$$\operatorname{Hom}(E_n, X)^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(X, L^nE_n[n]), \tag{7}$$

где $X \in \langle E_0, \ldots, E_n\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим подкатегорию $\mathscr{B} = \langle E_0, \ldots, E_{n-1}\rangle$. Согласно теореме 3.2 имеется треугольник $B \to E_n \to L^nE_n[n]$, где $B \in \mathscr{B}$, а $L^nE_n[n] \in \mathscr{B}^\perp$. Из него видим, что

$$\operatorname{Hom}^\cdot(E_n, L^nE_n) = \operatorname{Hom}^\cdot(E_n, E_n) = K.$$

Последнее равенство означает, что $\operatorname{Hom}(E_n, L^nE_n[k]) = 0$ при $k \neq 0$ и $\operatorname{Hom}(E_n, L^nE_n) = K$. Построим спаривание между $\operatorname{Hom}(E_n, X)$ и $\operatorname{Hom}(X, L^nE_n[n])$, сопоставляя двум морфизмам их композицию:

$$\operatorname{Hom}(E_n, X) \otimes \operatorname{Hom}(X, L^nE_n[n]) \to \operatorname{Hom}(E_n, L^nE_n[n]). \tag{8}$$

Покажем, что это спаривание невырождено для любого X. По теореме 3.2 для X имеем треугольник $Y \to X \to L^nX[n]$, где $Y \in \mathscr{B}$. Используя этот треугольник, (8) переписывается в виде

$$\operatorname{Hom}(E_n, L^nX[n]) \otimes \operatorname{Hom}(L^nX[n], L^nE_n[n]) \to \operatorname{Hom}(E_n, L^nE_n[n]);$$

$L^nX[n]$ принадлежит $\mathscr{B}^\perp$. Если рассмотреть исключительный набор $(L^nE_n, E_0, \ldots, E_{n-1})$, то видно, что $\mathscr{B}^\perp = \langle L^nE_n\rangle$ (подробнее об этом см. лемму 6.1). Категория $\langle L^nE_n\rangle$ состоит из прямых сумм и сдвигов объекта L^nE_n, так как он исключительный. Таким образом, невырожденность (8) достаточно проверить для $X = L^nE_n$, а в этом случае она очевидна.

Доказательство теоремы 4.1. 1)$\Rightarrow$2) Пусть теперь $(E_0, \ldots, E_n)$ — набор из условия теоремы; $L^nE_n[n]$, согласно утверждению 4.2, является представляющим объектом функтора $\operatorname{Hom}(E_n, X)^*$ в категории $D^b(\operatorname{Sh}(X))$. Но теорема двойственности Серра дает

$$\operatorname{Hom}(E_n, X)^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(X, E_n \otimes K[m]).$$

Из единственности представляющего объекта следует, что $L^nE_n[n] = E_n(K)[m]$, отсюда $E_{-1} = L^nE_n = E_n(K)[m-n]$. Это — условие спиральности при $i = -1$. Так как любой последовательный поднабор длины $n+1$ в последовательности (6) является исключительным, отсюда следует спиральность для любого i.

2)$\Rightarrow$1) Пусть набор $(E_0, \ldots, E_n)$ удовлетворяет условию 2) теоремы. По лемме 2.2 перестройки объектов E_i принадлежат подкатегории $\mathscr{A} = \langle E_0, \ldots, E_n\rangle$. Отсюда, все элементы спирали принадлежат $\mathscr{A}$. Учитывая инвариантность $\mathscr{A}$ относительно сдвигов, имеем $E_0(pK) \in \mathscr{A}$ для всех $p \in \mathbf{Z}$.

Из существования сопряженного функтора (см. п. 3) следует, что любой объект X исходной категории включается в отмеченный треугольник $i^!X \to X \to Y$, где $i^!X \in \mathscr{A}$, а $\mathbf{R}\operatorname{Hom}(A, Y) = 0$ для всех $A \in \mathscr{A}$. Таким образом, достаточно показать, что все такие Y равны нулю; Y представляется некоторым конечным комплексом $C^\cdot$ объектов абелевой категории когерентных пучков на X. Предположим, что антиканонический класс очень обилен, вложим X с помощью $-K$ в проективное пространство $\varphi: X \to \mathbf{P}^l$. Тогда $\varphi_*(C_i)$ будут когерентными пучками на $\mathbf{P}^l$, оператор тензорного умножения на $-K$ перейдет в оператор умножения на $\mathcal{O}(1)$. Имеем

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}(E_0(pK), C^i) = H^*(X, \varphi_*(E_0^* \underset{\mathcal{O}(X)}{\otimes} C^i(-pK))) =$$
$$= H^*(\mathbf{P}^l, \varphi_*(E_0^* \underset{\mathcal{O}(X)}{\otimes} C^i) \otimes \mathcal{O}(p)).$$

При $p \gg 0$ все высшие H^i $(i>0)$ будут равны нулю. Это значит, что $\mathbf{R}\operatorname{Hom}^{\cdot}(E_0(pK), C^{\cdot})$ вычисляются с помощью комплекса $K^{\cdot}(p)$:

$$K^i(p) = H^0(\mathbf{P}^l, \varphi_*(E_0^* \underset{\mathcal{O}(X)}{\otimes} C^i) \otimes \mathcal{O}(p)),$$

с естественным дифференциалом. Но $\mathbf{R}\operatorname{Hom}^{\cdot}(E_0(pK), C^{\cdot}) = 0$ и, значит, комплекс $K^{\cdot}$ ацикличен.

Теорема Серра [16] утверждает, что абелева категория $\operatorname{Sh}(\mathbf{P}^l)$ пучков на $\mathbf{P}^l = \mathbf{P}(V^{l+1})$ изоморфна факторкатегории конечнопорожденных градуированных модулей над $S^{\cdot}(V^*)$ по полной подкатегории конечномерных модулей. Причем изоморфизм ставит в соответствие пучку $\mathcal{F}$ градуированный модуль $\bigoplus\limits_p H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(p))$, где можно считать $p \gg 0$. Изоморфизм категорий порождает изоморфизм производных категорий. Так как комплекс $\bigoplus\limits_{p \gg 0} K^{\cdot}(p)$ ацикличен, соответствующий объект производной категории $D^b(S^{\cdot})$ равен нулю и, значит, по теореме Серра $\varphi_*(E_0^* \otimes C^{\cdot}) = 0$. Отсюда $C^{\cdot} = 0$. Отметим еще, что в случае, когда $-K$ не очень обилен, его нужно заменить очень обильной кратностью $-nK$, в остальном рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

5. Колчаны. *Колчаном* Δ называется множество, состоящее из вершин и стрелок между ними. Нас будут интересовать *конечные колчаны*, т. е. такие, в которых число вершин и стрелок конечно. *Путем* называется такая последовательность стрелок, в которой начало следующей стрелки совпадает с концом предыдущей. *Длина пути* — это количество стрелок в нем. *Композиция путей* определяется как составной путь (если он определен). Формальные линейные комбинации с коэффициентами из поля K образуют алгебру путей $K\Delta$ относительно операции композиции путей. При этом произведение $\beta \circ \alpha$ путей α и β считается равным нулю, если начало β не совпадает с концом α. Вершинам соответствуют вырожденные пути длины 0. Они являются проекторами в алгебре путей.

Если $S \subset K\Delta$ — некоторое подмножество, то *колчаном с соотношениями* называется факторалгебра алгебры путей $K\Delta$ по идеалу, порожденному S. Образующие идеала можно выбрать в виде линейной комбинации путей с одинаковым началом и концом. Будем обозначать через $K\Delta^k$ идеал в $K\Delta$, порожденный путями длины, большей либо равной k.

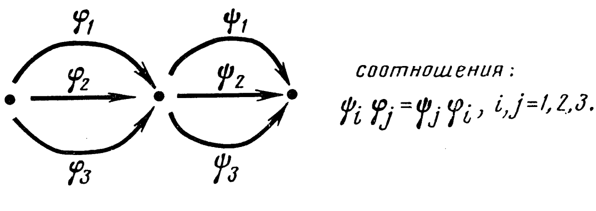
Колчаны с соотношениями представляют широкий класс алгебр.

Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем K. Алгебра A называется *базисной*, если $A/\operatorname{rad} A$ есть прямая сумма нескольких копий K, здесь $\operatorname{rad} A$ — радикал алгебры A. Всякая алгебра A' эквивалентна по Морите некоторой базисной алгебре A. Это значит, что категории представлений у них эквивалентны. Имеет место утверждение (Габриэль), согласно которому любая базисная конечномерная K-алгебра является колчаном Δ с соотношениями S. Причем колчан определен однозначно, если предполагать, что $S \subset K\Delta^2$. В дальнейшем мы будем считать это условие выполненным.

Пример 5.1. Колчан P_n содержит две вершины и n стрелок из первой во вторую. Например P_2: $\cdot\rightrightarrows\cdot$.

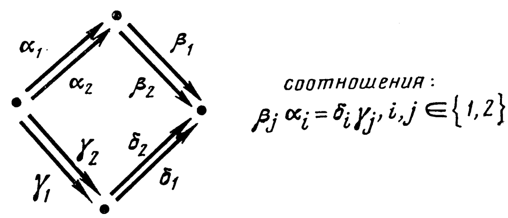
Пример 5.2. Колчан A_n содержит n вершин $X_1, \dots, X_n$ и $n-1$ стрелок $\varphi_i: X_i \to X_{i+1}$, $i=1, \dots, n-1$. Например A_3: $\bullet\to\bullet\to\bullet$.

Пример 5.3. Колчан S_n содержит n вершин $X_1, \dots, X_n$ и $(n-1)n$ стрелок $\varphi_i^j: X_i \to X_{i+1}$, $i=1, \dots, n-1$; $j=1, \dots, n$. Соотношения: $\varphi_{i+1}^j \varphi_i^k = \varphi_{i+1}^k \varphi_i^j$. Например S_3:



Заметим, что A_2 совпадает с P_1, а S_2 совпадает с P_2.

Пример 5.4.



Пусть A — алгебра путей колчана Δ с соотношениями S: $A = K\Delta/(S)$. Тогда образ $K\Delta^1$ при естественном эпиморфизме $K\Delta \to A$ является радикалом A. В дополнении к этому радикалу лежат пути длины 0. Они нумеруются вершинами колчана Δ и будут обозначаться $p_\alpha \in A$, где α — вершина Δ. Элементы p_α являются ортогональными проекторами: $p_\alpha p_\beta = p_\beta p_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \beta$, и $p_\alpha^2 = p_\alpha$.

Представлением колчана называется левый A-модуль, т. е. векторное пространство V над полем K с левым действием алгебры A. Действие ортогональных проекторов разбивает V в прямую сумму: $V = \bigoplus_\alpha p_\alpha V$. Обозначим: $V_\alpha = p_\alpha V$. Тогда стрелка из вершины α в вершину β задает линейный оператор $V_\alpha \to V_\beta$. Отсюда становится ясно, что наше определение представления колчана совпадает с традиционным, где каждой вершине α сопоставляется векторное пространство V_α и каждой стрелке из α в β — морфизм $V_\alpha \to V_\beta$ так, чтобы выполнялись соотношения S.

Правым модулям над A соответствуют представления колчана Δ^{opp}, получающегося из Δ обращением стрелок, при этом соотношения выписываются в обратном порядке.

Упорядоченным колчаном с соотношениями назовем колчан, в котором вершины упорядочены и начало любой стрелки имеет номер меньший, чем конец (за исключением стрелок длины 0). Колчаны примеров 5.1—5.4 являются упорядоченными. В примере 5.4 это достигается расположением верхней и нижней вершин в произвольном порядке между левой и правой.

Пусть Δ — упорядоченный колчан с вершинами $X_0, \dots, X_n$ и пусть p_i — проектор, соответствующий X_i, в алгебре A путей колчана Δ. В дальнейшем нам будет удобно рассматривать правые модули над A.

Обозначим через A-mod категорию, которую они образуют. Всякое представление V алгебры A имеет разложение $V=\bigoplus_{i=0}^{n} G_iV$, где $G_iV=Vp_i$. Обозначим через S_i представление, для которого $G_jV=0$ при $j\neq i$ и $G_iV=K$, а все стрелки представлены нулевыми морфизмами. Модули S_i ($i=0, 1, \ldots, n$) дают описание всех неприводимых представлений A. Действительно, любой модуль V обладает фильтрацией модулями $F^kV=\bigoplus_{i=0}^{k} G_iV$. Фактор $F^kV|F^{k-1}V$ есть прямая сумма нескольких экземпляров S_k. Проективные модули алгебры A есть подмодули A как правого модуля над собой и имеют вид $P_k=p_kA$. Имеет место разложение $A=\bigoplus_{i=0}^{n} P_i$. Кроме того,

$$A=\mathrm{Hom}_A(A, A)=\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=0}^{n} P_i, \bigoplus_{i=0}^{n} P_i\right)=\bigoplus_{i,j} (\mathrm{Hom}(P_i, P_j)).$$

Это равенство позволяет интерпретировать стрелки колчана как морфизмы между проективными модулями. В частности, $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)=0$ при $i>j$.

Легко проверить, что $G_lP_k=p_kAp_l=0$ при $l>k$, а G_kP_k есть одномерное пространство. Это позволяет построить точную последовательность

$$0\to F^{k-1}P_k\to P_k\to S_k\to 0. \tag{9}$$

ЛЕММА 5.5. *Пусть V — правый A-модуль. Предположим, что $G_iV=0$ при $i>k$. Тогда $V\in\langle P_0, \ldots, P_k\rangle$.*

Напомним, что $\langle P_0, \ldots, P_k\rangle$ — триангулированная подкатегория, порожденная объектами $P_0, \ldots, P_k$, в $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$.

Доказательство (по индукции). При $k=0$ утверждение очевидно. Если при $k=s-1$ утверждение доказано, то для любого V справедливо $F^{s-1}V\in\langle P_0, \ldots, P_{s-1}\rangle$. Для V, удовлетворяющего условиям леммы при $k=s$, имеем точную последовательность

$$0\to F^{s-1}V\to V\to G_sV\to 0,$$

где G_sV рассматривается как прямая сумма нескольких экземпляров S_s. Но из (9) следует, что $S_k\in\langle P_0, \ldots, P_s\rangle$. Отсюда $V\in\langle P_0, \ldots, P_s\rangle$.

ЛЕММА 5.6. *Пусть $\mathscr{B}=\langle P_0, \ldots, P_{k-1}\rangle$ — подкатегория в $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$, $i:\mathscr{B}^\perp\to\mathscr{A}$ — функтор вложения. Тогда*

$$i^*P_k=S_k=L^kP_k[k]. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность (9). В ней $F^{k-1}P_k$ принадлежит $\mathscr{B}$ по лемме 5.5. Эту последовательность можно интерпретировать как треугольник в $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$. Согласно лемме 3.1 достаточно убедиться, что $S_k\in\mathscr{B}^\perp$. Так как P_i — проективные модули, $\mathrm{Ext}^j(P_i, S_k)=0$ при $j\neq 0$. Осталось показать, что $\mathrm{Hom}(P_i, S_k)=0$ при $i<k$.

Любой такой гомоморфизм задает набор отображений на градуировочных компонентах: $G_jP_i\to G_jS_k$. Но S_k имеет только k-ую компоненту, а $G_kP_i=0$ при $i<k$. Значит, все морфизмы равны нулю. Согласно теореме 3.2 получаем равенство (10).

6. Функторы в категорию $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$, связанные с исключительным набором. Пусть опять $\mathscr{A}$ — произвольная триангулированная категория.

Определение. Исключительный набор объектов $\mathcal{A}$ $(E_0, \ldots, E_n)$, удовлетворяющий условиям $\mathrm{Hom}^k(E_i, E_j) = 0$ при всех i, j; $k \neq 0$, называется *сильным исключительным набором.*

Примером сильного исключительного набора является $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots \ldots, \mathcal{O}(n))$ на $\mathbf{P}^n$.

ЛЕММА 6.1. *Предположим, что* $\mathcal{A}$ *порождается (не обязательно сильным) исключительным набором* $(E_0, \ldots, E_n)$. *Положим* $\mathcal{C} = \langle E_0, \ldots \ldots, E_k\rangle$ *и* $\mathcal{B} = \langle E_{k+1}, \ldots, E_n\rangle$. *Тогда* $\mathcal{C} = \mathcal{B}^\perp$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{C}$ ортогональна $\mathcal{B}$ справа. Пусть $X \in \mathcal{B}^\perp$ и $i: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ — функтор вложения. Имеем треугольник $i^!X \to X \to Z$, $Z \in \mathcal{C}^\perp$. Так как $i^!X$ и X принадлежат $\mathcal{B}^\perp$, то $Z \in \mathcal{B}^\perp$. Отсюда Z ортогонален всем порождающим объектам E_i и, значит, равен 0.

Обозначим $E = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} E_i$ и $A = \mathrm{Hom}(E, E)$; A является алгеброй путей конечного упорядоченного колчана с соотношениями. Этот колчан содержит $n+1$ вершину, и для проективных модулей этой алгебры имеются изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_i, E_j) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_i, P_j).$$

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что ограниченная производная категория* $\mathcal{A} = D^b(\mathrm{Sh}(X))$ *когерентных пучков на гладком многообразии* X *порождена сильным исключительным набором* $(E_0, \ldots, E_n)$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *эквивалентна ограниченной производной категории* $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$ *правых конечномерных модулей над алгеброй* A.

Доказательство. Зафиксируем для каждого объекта $Y \in \mathcal{A}$ его конечную плоскую квазипроективную резольвенту $I(Y)$, т. е. конечный комплекс плоских квазикогерентных пучков, квазиизоморфный объекту Y. Построим функтор Φ из $\mathcal{A}$ в $D_0{}^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$ — ограниченную производную категорию комплексов бесконечномерных правых модулей над A с конечномерными гомологиями. Так как категории $D_0{}^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$ и $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$ эквивалентны, то Φ и будет интересующим нас функтором. Положим $\Phi(Y) = \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(E, I(Y))$ с естественным правым действием $A = \mathrm{Hom}(E, E)$ на этом комплексе.

Покажем, что Φ является эквивалентностью категорий; $\Phi(E_i)$ есть комплекс A-модулей с гомологиями $H^j(\Phi(E_i)) = 0$ при $j \neq 0$ и $H^0(\Phi(E_i))$ изоморфен P_i. Отсюда следует, что $\Phi(E_i)$ квазиизоморфен P_i в категории $D_0{}^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$.

Чтобы доказать, что Φ — строго полный функтор, т. е. что он задает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(\Phi(X), \Phi(Y)) \tag{11}$$

для всех X и $Y \in \mathcal{A}$, будем действовать по индукции. Сначала заметим, что (11) имеет место в случае, когда X и Y — элементы набора $\{E_i\}$, поскольку E_i переходит в P_i. Так как $\{E_i\}$ — сильный исключительный набор, то равенство (11) можно распространить на множество сдвигов объектов E_i. Но этим множеством категория $\mathcal{A}$ порождена с помощью одной операции конуса, ибо сдвиг $X[i]$ объекта X, вкладывающегося в треугольник $A \to X \to B$, сам вкладывается в треугольник $A[i] \to X[i] \to B[i]$.

Теперь мы можем считать по индукции, что объекты X и Y вкладываются в треугольник $A \to X \to B$ и $C \to Y \to D$, где для пар (A, C), (B, C),

(A, D), (B, D) равенство (11) уже установлено. Для гомоморфизмов имеем коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{tikzcd}
& {} & {} & {} & \\
\ldots \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}(A,C)} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(A,Y) \arrow[r] \arrow[u] & \underline{\mathrm{Hom}(A,D)} \arrow[r] \arrow[u] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,C) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(X,D) \arrow[r] \arrow[u] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}(B,C)} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(B,Y) \arrow[r] \arrow[u] & \underline{\mathrm{Hom}(B,D)} \arrow[r] \arrow[u] & \ldots \\
& {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Такая же диаграмма строится для треугольников $\Phi(A)\to\Phi(X)\to\to\Phi(B)$ и $\Phi(C)\to\Phi(Y)\to\Phi(D)$. Функтор Φ задает морфизм этих диаграмм, который является изоморфизмом для подчеркнутых пространств. Из точности по строкам и столбцам следует, что Φ задает изоморфизм для $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Это доказывает строгую полноту функтора Φ.

$D^b(\text{mod-}A)$ эквивалентна гомотопической категории проективных модулей, которые являются прямыми суммами P_i. Следовательно, она порождена модулями P_i. Но P_i принадлежат образу Φ. Так как $D^b(\text{mod-}A)$ и $D_0{}^b(\text{mod-}A)$ эквивалентны, отсюда следует сюръективность на объектах.

З а м е ч а н и е. Если $\mathscr{A}=D^b(\mathscr{C})$ — ограниченная производная категория некоторой абелевой категории $\mathscr{C}$, имеющей достаточно много инъективных объектов, то утверждение остается справедливым и доказывается так же (без использования лишней эквивалентности между $D_0{}^b(\text{mod-}A)$ и $D^b(\text{mod-}A)$).

Было бы интересно доказать утверждение теоремы в случае, когда $\mathscr{A}$ — произвольная триангулированная категория, не снабженная структурой производной категории. Трудности здесь возникают при попытке определить значение функтора на морфизмах. При построении функтора реализации для t-структур аналогичные сложности преодолеваются в [3] путем введения дополнительных внешних данных — фильтрованной производной категории.

Еще важнее было бы доказать аналог теоремы 6.2 для произвольных исключительных наборов. Здесь уже не вполне ясно, как по внутренней структуре триангулированной категории восстанавливать дифференциально-градуированную алгебру гомоморфизмов элементов набора.

Покажем на примерах когерентных пучков на многообразиях, как осуществляется эквивалентность категорий.

П р и м е р 6.3. Пусть $\mathscr{A}=D^b(\mathrm{Sh}(\mathbf{P}^1))$. Сильный исключительный набор — $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))$, $A=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1), \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1))$; A является алгеброй путей колчана P_2 из примера 5.1. Этот колчан состоит из двух вершин и двух стрелок из первой вершины во вторую. Проекторам p_1 и p_2 соответствуют тождественные эндоморфизмы в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}(1)$. Неразложимые (правые) модули алгебры A описаны Кронекером и хорошо известны. Они соответствуют корням в решетке весов (λ_1, λ_2), здесь λ_1— кратность неприводимого представления S_1 и λ_2— представления S_2 в композиционном ряду Жордана — Гельдера. Вещественные корни — это веса вида $(n, n+1)$ и $(n+1, n)$, где $n\geqslant 0$. Им (согласно теореме 6.2) соответствуют комплексы когерентных пучков на $\mathbf{P}^1$, соответственно, $\mathcal{O}(n)$ и $\mathcal{O}(-n)$ [1]. Мнимые корни — это веса (n, n), $n>0$. Каждому такому корню соответствует одномерное семейство неразложимых представлений $V_{n,x}$, где $x \in \mathbf{P}^1$. Модулю $V_{n,x}$ сопоставляется пучок струй до $(n-1)$-го порядка включительно в точке x.

Для любого колчана без соотношений (а это соответствует тому, что гомологическая размерность A равна 1) можно показать, что все неразложимые объекты категории $D^b(\text{mod-}A)$ с точностью до сдвига эквивалентны чистым модулям (т. е. комплексам вида $0 \to M \to 0$).

Пример 6.4. Рассмотрим исключительный набор $(\mathcal{O}, \ldots, \mathcal{O}(n))$ в $D^b(\mathrm{Sh}(\mathbf{P}^n))$. Ему соответствует алгебра $A = \bigoplus\limits_{i,j} \mathrm{Hom}\,(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j))$, которая является алгеброй путей колчана примера 5.3.

Пример 6.5. Пусть Q — невырожденная квадрика в $\mathbf{P}^3$. Известно, что Q изоморфна $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. В качестве исключительного набора можно рассмотреть набор $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(0, 1), \mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(1, 1))$. Здесь $\mathcal{O}(i, j) = \mathcal{O}(i) \boxtimes \mathcal{O}(j)$. Перестройки этого набора изучались в работе [18]. Ему соответствует алгебра примера 5.4. Исключительные наборы на квадриках произвольной размерности найдены в [17, 11].

7. Кошулевы алгебры. Пусть $(E_0, \ldots, E_n)$ — сильный исключительный набор. Рассмотрим алгебру $A = \bigoplus\limits_{i,j=0}^{n} \mathrm{Hom}\,(E_i, E_j)$. Она является алгеброй путей упорядоченного колчана с соотношениями и $n+1$ вершиной. Обозначим через A_k подпространство в A, порожденное путями длины k, тогда A становится градуированной алгеброй: $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \oplus A_2 \oplus \ldots$; A_0 — подалгебра, являющаяся суммой одномерных: $A_0 = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} Kp_i$, где p_i — i-тый ортогональный проектор; A_i снабжены структурой A_0-бимодуля. Предположим, что стрелки колчана существуют только между соседними вершинами. Это эквивалентно тому, что A порождена A_0 и A_1. Другими словами, имеет место равенство $A_k = A_1 \underset{A_0}{\otimes} A_1 \otimes \ldots \ldots \otimes A_1 / I_k$, где I_k — некоторые пространства соотношений со структурой A_0-бимодуля.

Алгебра A описанного вида называется *квадратичной*, если все соотношения I_k порождены $I_2 \subseteq A_1 \underset{A_0}{\otimes} A_1$. Образующие элементы I_2 есть некоторые линейные комбинации путей длины 2 с одинаковым началом и концом. Формально квадратичность выражается в виде следующего включения:

$$I_k \subset I_2 \underset{A_0}{\otimes} A_1 \otimes \ldots \underset{A_0}{\otimes} A_1 + \ldots + A_1 \otimes \ldots \otimes A_1 \otimes I_2,$$

здесь каждое слагаемое содержит $(k-1)$ сомножитель и рассматривается как подпространство в $A_1^{\otimes k}$.

Для алгебры A можно определить двойственную алгебру B; B — это квадратичная алгебра, для которой $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1^*$, $J_2 = I_2^{\perp}$, где $J_2 \subset \subset B_1 \underset{A_0}{\otimes} B_1 = A_1^* \otimes A_1^*$, а ортогональное пространство рассматривается относительно естественного спаривания.

Пространство $K = B^* \underset{A_0}{\otimes} A$ снабжается структурой комплекса. Для любого A_0-бимодуля V положим $V^{ij} = p_i V p_j$. Ясно, что $A_1^{i,j} \neq 0$ только при $i = j+1$, так как элементы A_1 — это стрелки колчана. Рассмотрим произвольные базисы e_i^j в пространствах $A_1^{j+1,j}$ и ξ_i^j — двойственные базисы в пространствах $B_1^{j,j+1}$. Рассмотрим еще оператор $d: K \to K$:

$$d = \sum_{i,j} l(\xi_i^j)^* \otimes l(e_i^j),$$

здесь $l(\xi_i^j)^*$ — оператор, сопряженный оператору левого умножения на ξ_i^j в B, а $l(e_i^j)$ — оператор левого умножения на e_i^j в A. Оператор d обладает свойством $d^2=0$ [15].

Определение. Комплекс $K=B^* \otimes A$, снабженный дифференциалом d, называется *комплексом Кошуля.*

Дифференциал сохраняет структуру A_0-бимодуля комплекса K, поэтому $K^{i,j}$ инвариантны относительно d. Пространства $K^{i,i}$ одномерны для всех i, и дифференциал d на них равен нулю.

Определение. Алгебра A называется *кошулевой*, если гомологии комплекса K изоморфны $\bigoplus\limits_{i=0}^{n} K^{i,i}$.

Дифференциал сохраняет структуру правого A-модуля. Вместе с действием A_0 слева это позволяет разбить K в сумму комплексов A-модулей: $K = \oplus K^i$, где

$$K^i = \bigoplus_j K^{i,j} = \bigoplus_{k,j} B^{*i,k} \otimes A^{k,j} = \oplus B^{*i,k} \otimes P_k,$$

здесь P_k — проективные A-модули: $P_k = p_k A$; K^i являются градуированными комплексами A-модулей, причем градуировочным индексом является k:

$$\ldots \to B^{*i,i-2} \otimes_{A_0} P_{i-2} \to B^{*i,i-1} \otimes_{A_0} P_{i-1} \xrightarrow{d} P_i \to 0.$$

Кошулевость означает, что комплексы K^i точны во всех членах, кроме P_i, где гомологии одномерны и изоморфны $P_i^{i,i}$. Это означает, что мы имеем точную последовательность

$$\ldots \to B^{*i,i-2} \otimes_{A_0} P_{i-2} \to B^{*i,i-1} \otimes_{A_0} P_{i-1} \to P_i \to S_i \to 0, \tag{12}$$

где S_i — неприводимый модуль, соответствующий i-той вершине.

Утверждение 7.1. *Алгебра A кошулева тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Ext}^k(S_i, S_j)=0$ *при* $k \neq i-j$.

Доказательство. а) Пусть алгебра кошулева. В лемме 5.6 показано, что $\mathrm{Hom}(P_k, S_j)=0$ при $k<j$. Согласно лемме 5.5 $S_k \in \langle P_0, \ldots, P_k \rangle$ и, значит, $\mathrm{Hom}(P_k, S_j)=0$ при $k>j$. Для вычисления Ext'-ов применим функтор $\mathrm{Hom}(?, S_j)$ к проективной резольвенте модуля S_i, которую доставляет последовательность (12). Получим, что $\mathrm{Ext}^k(S_i, S_j)=0$ при $k \neq i-j$ и $\mathrm{Ext}^{i-j}(S_i, S_j) = B^{i,j}$.

б) Предположим, что i-тый, к примеру, комплекс вида (12) не точен. Пусть на первом справа месте, где он не точен, стоит $B^{*i,j} \otimes P_j$. Рассмотрим соответствующий кусок комплекса (12):

$$\ldots \to B^{*i,j-2} \otimes P_{j-2} \to B^{*i,j-1} \otimes P_{j-1} \to B^{*i,j} \otimes P_j \to \ldots \tag{13}$$

Этот комплекс разбивается в сумму комплексов $K^{i,s}$ — градуировочных компонент относительно правого действия A_0:

$$\ldots \to B^{*i,j-1} \otimes P_{j-1}^{j-1,s} \to B^{*i,j} \otimes P_j^{j,s} \to \ldots$$

При $s=j$, $j-1$ этот комплекс точен в месте, где стоит P_j. Это следует из квадратичности алгебры B. Выберем минимальное s такое, что $K^{i,s}$

не точен в интересующем нас месте. Тогда $s<j-1$. Пусть $H_j^{i,s}$ — пространство гомологий этого комплекса в j-том месте. Тогда мы можем достроить комплекс (13) до комплекса проективных модулей, точного во всех местах, причем в j-том и $(j-1)$-ом месте резольвента будет иметь вид

$$\ldots \to P \oplus B^{*i,j-1} \otimes P_{j-1} \oplus H_j^{i,s} \otimes P_s \to B^{*i,j} \otimes P_j \to \ldots \to S_i \to 0,$$

где P — сумма проективных модулей вида P_t, где $t<s<j-1$. Вычисляя $\mathrm{Ext}^{i-j+1}(S_i, S_s)$ с помощью этой резольвенты, получим, что они равны $(H_j^{i,s})^*$. Так как $s<j-1$, утверждение доказано.

Ранее (лемма 5.6) было показано, что $S_k = L^k P_k[k]$. Таким образом,

$$\mathrm{Hom}^k(L^i P_i, L^j P_j) = \mathrm{Hom}^{k+i-j}(L^i P_i[i], L^j P_j[j]) = \mathrm{Ext}^{k+i-j}(S_i, S_j).$$

Используя теорему 6.2, получаем

Следствие 7.3. *Кошулевость алгебры гомоморфизмов сильного исключительного набора* $\{E_i\}$ *эквивалентна сильной исключительности набора* $\{L^i E_i\}$.

Определение. Набор $\{L^n E_n, L^{n-1} E_{n-1}, \ldots, E_0\}$ называется *левым двойственным набором к набору* $\{E_0, \ldots, E_n\}$. Аналогично, *правый двойственный набор* — это $\{E_n, RE_{n-1}, \ldots, R^n E_0\}$.

8. Самосогласованные алгебры и перестройки сильных исключительных наборов. Было бы интересно выяснить, при каких условиях набор сохраняет сильную исключительность при перестройках. В случае пучков на проективном пространстве вопросы перестраиваемости набора изучались в работе [8].

Рассмотрим бесконечную последовательность (6), построенную по сильному исключительному набору $\sigma = (E_0, \ldots, E_n)$. Будем называть ее *спиралью* S_σ. Назовем перестройку набора *допустимой*, если набор, получившийся в результате перестройки,— сильный исключительный набор. Спираль называется *допустимой*, если любой виток спирали — сильный исключительный набор. Следуя [8], перестройки спирали определяются как одновременные перестройки всех объектов, отстоящих друг от друга на расстоянии периода. Перестройка спирали называется *допустимой*, если результат перестройки — допустимая спираль.

ЛЕММА 8.1. *Следующие условия на допустимую спираль* S *эквивалентны*:

а) *все перестройки* S *вида* R_E^k, *где* E — *элемент спирали, являются допустимыми*;

б) *все перестройки* S *вида* L_E^k *являются допустимыми*;

в) *в любом витке спирали перестройки внутри витка вида* R_E^k *и* L_E^k, *где* E — *элемент витка, являются допустимыми перестройками набора.*

При перестройках спирали, из соображений периодичности, достаточно ограничиться сдвигами на расстояние, меньшее, чем период спирали.

Доказательство. Эквивалентность а) и б) следует из периодичности. Очевидно также, что из а) и б) следует в).

Пусть теперь R_E^k — перестройка спирали S и τ — некоторый виток, содержащий $R^k E$; если E не принадлежит τ, то $R^n E$ принадлежит τ и перестройку $R^k E$ можно воспринимать как $L^{n-k} R^n E$, т. е. левую перестройку внутри витка. Это доказывает, что из в) следует а).

Гипотеза. *Если выполнено одно из эквивалентных условий леммы, то все перестройки спирали допустимы.*

Ясно, что условия 8.1 необходимы для этого.

Теперь мы переформулируем в) для одного исключительного набора в терминах алгебры гомоморфизмов этого набора.

Аналогично комплексу Кошуля $K=B^*\otimes A$ (п. 7) можно определить еще три комплекса, связанных с алгеброй A,

$$K_1=A\otimes B^*,\quad K_2=A\otimes B \quad \text{и} \quad K_3=B\otimes A.$$

Дифференциалы в этих комплексах задаются формулами (в обозначениях п. 7):

$$d_1=\sum r(e_i^j)\otimes r(\xi_i^j)^*,\quad d_2=\sum r(e_i^j)\otimes l(\xi_i^j),\quad d_3=\sum r(\xi_i^j)\otimes l(e_i^j).$$

Комплекс K_1 можно интерпретировать как комплекс Кошуля для алгебры A^{opp}, а комплекс K_2 — как комплекс K_3 для A^{opp}.

Рассмотрим комплекс $K_2=A\otimes B$. Он биградуирован, так как является A_0-бимодулем: $K_2=\oplus K_2^{i,j}$, $K_2^{i,j}=p_iK_2p_j$; $K_2^{i,j}$ являются градуированными комплексами относительно дифференциала d_2:

$$0\to A^{i,j}\to A^{i,j-1}\otimes B^{j-1,j}\to\ldots\to A^{i,0}\otimes B^{0,j}\to 0.$$

Определение. Алгебра A называется *кокошулевой*, если комплексы $K_2^{i,j}$ при $i\neq j$ точны во всех членах, кроме последнего ($A^{i,0}\otimes B^{0,j}$).

Отметим особо, что на диагональные комплексы $K_2^{i,i}$ эти требования, вообще говоря, не распространяются.

Определение. Алгебра A называется *самосогласованной*, если A и A^{opp} кошулевы и кокошулевы.

Это значит, что комплексы $K^{i,j}$ и $K_1^{i,j}$ точны при $i\neq j$, а $K_2^{i,j}$ (соответственно $K_3^{i,j}$) могут быть не точны только в концах (соответственно в началах) при $i\neq j$.

Утверждение 8.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *алгебра A гомоморфизмов сильного исключительного набора самосогласована*;

б) *перестройки вида R_E^k и L_E^k внутри σ допустимы.*

Доказательство. Следуя теореме 6.2, мы можем отождествить E_i и P_i. Предположим, что алгебра кошулева. Тогда, согласно п. 7,

$$B^{j,i}=\mathrm{Hom}^\cdot(L^iP_i, L^jP_j)=\mathrm{Hom}^\cdot(L^{i-j}P_i, P_j)=\mathrm{Hom}^\bullet(P_i, R^{i-j}P_j)=$$
$$=\mathrm{Hom}^\cdot(R^{i-j-1}P_j, P_i)^*.$$

В частности, $\mathrm{Hom}^\cdot(R^{i-j-1}P_j, P_i)$ сосредоточен как комплекс в нулевой компоненте. Отсюда легко следует, что комплексы $K_2^j=\bigoplus\limits_i K_2^{i,j}$ представляют объекты $R^{n-i}P_i$ так же, как в п. 7 K^i представляли $L^iP_i=S_i[-i]$. Допустимость перестроек означает отсутствие Hom^i при $i\neq 0$ между P_j и $R^{n-i}P_i$, где $i\neq j$. Вычисляя их с помощью комплексов K_2^i и K^i, немедленно убеждаемся в эквивалентности утверждений леммы. Однако мы предположили кошулевость. Нам, следовательно, осталось показать, что из б) следует кошулевость. Для этого согласно следствию 7.3 надо убедить в том, что $\mathrm{Hom}^k(L^iP_i, L^jP_j)=0$ при $k\neq 0$. Имеем

$$\mathrm{Hom}^\cdot(L^iP_i,\ L^jP_j)=\mathrm{Hom}^\cdot(L^{i-j}P_i, P_j),$$

а это по условию б) влечет требуемое.

Алгебры колчанов примеров 5.1 и 5.3 являются самосогласованными. Колчан A_n при $n>2$ дает пример кошулевой, но несамосогласованной алгебры.

Интересной характеристикой алгебры, судя по всему, являются комплексы $K_2^{i,i}$. Для набора $\{\mathcal{O}(i)\}$ на $\mathbf{P}^n$ они точны всюду, кроме конца. В общем случае место, где они не точны (если оно одно), должно иметь смысл квантовой суперградуировки.

Теперь вернемся к геометрическому случаю.

9. Сильная исключительность в геометрическом случае. Обозначим через $D^{\geqslant 0}$ полную подкатегорию в $D^b(\mathrm{Sh}(X))$, порожденную комплексами с гомологиями, сосредоточенными в положительных размерностях. Аналогично определяется $D^{\leqslant 0}$.

Рассмотрим исключительную пару (E, F) объектов $D^b(\mathrm{Sh}(X))$.

ЛЕММА 9.1. а) *Пусть E — пучок* $(\Leftrightarrow E \in D^{\geqslant 0} \cap D^{\leqslant 0})$, *а* $F \in D^{\geqslant 0}$. *Тогда* $L_E F \in D^{\geqslant 0}$.

б) *Пусть* $F \in D^{\geqslant 0} \cap D^{\leqslant 0}$, *а* $E \in D^{\leqslant 0}$. *Тогда* $R_F E \in D^{\leqslant 0}$.

Доказательство немедленно следует из рассмотрения длинной точной последовательности функтора гомологий в применении к треугольникам, определяющим перестройки (1).

Пусть $\mathcal{A} = D^b(\mathrm{Sh}(X))$, где X — многообразие размерности n, и пусть $\sigma = (E_0, \dots E_n)$ — исключительный набор, который состоит из пучков и порождает $\mathcal{A}$. Отметим, что длина набора на единицу больше, чем размерность многообразия.

Утверждение 9.2. *Перестройки набора σ также состоят из чистых пучков (т. е. комплексов, сосредоточенных в нулевой градуировочной компоненте).*

Доказательство. Так как набор σ порождает категорию, по теореме 4.1 $S = S_\sigma$ является спиралью в смысле п. 4, т. е. при сдвиге на период спирали пучок подкручивается на канонический класс (сдвига по производной категории не происходит, потому что период на единицу больше размерности многообразия). Таким образом, все элементы спирали — чистые пучки. Используя лемму 9.1, легко убеждаемся, что кратные левые перестройки $L_S{}^k E_i$ объектов спирали принадлежат $D^{\geqslant 0}$, а кратные правые перестройки $R_S{}^k E_i$ принадлежат $D^{\leqslant 0}$. Но из определения спирали следует, что $R_S{}^k E_i = L_S{}^{n-k} E_{i+n+1}$. Это значит, что $R_S{}^k E_i \in D^{\leqslant 0} \cap D^{\geqslant 0}$, т. е. является чистым пучком.

ТЕОРЕМА 9.3. *Набор σ является сильным исключительным набором.*

Доказательство. Перестройками легко добиться, чтобы любые два элемента набора оказались рядом, не меняя при этом самих этих элементов. Согласно утверждению 9.2, новый набор также состоит из пучков, поэтому достаточно убедиться в отсутствии высших Hom'-ов между соседними элементами исключительного набора.

Пусть (E, F) — исключительная пара. Тогда $\mathrm{Hom}^\bullet(E, F) = \mathrm{Hom}^\bullet(F, R_F E)^*$. Поэтому, если $\mathrm{Hom}^k(E, F) \neq 0$ при $k > 0$, то $\mathrm{Hom}^{-k}(F, R_F E) \neq 0$. Опять, согласно утверждению 9.2, F и $R_F E$ являются чистыми пучками и отрицательных Hom'-ов иметь не могут — противоречие.

Из 9.2 и 9.3 выводится

Следствие 9.4. *Перестройки σ являются сильными исключительными наборами.*

Согласно п. 8, алгебра гомоморфизмов элементов набора самосогласована и, в частности, кошулева.

Теорема 9.3 применима, кроме набора $\{\mathcal{O}(i)\}$ на $\mathbf{P}^n$, также к исключительным наборам на нечетномерных квадриках [17, 11]. Чтобы иметь возможность использовать ее на четномерных квадриках и грассманианах, где также имеются исключительные наборы [10], необходимо модифицировать формулировку теоремы.

Пусть $\mathcal{A}_i$, где $i=0, \ldots, n$,— набор подкатегорий, порождающих $D^b(\mathrm{Sh}(X))$, где X — многообразие размерности n. Предположим, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)=0$ при $i>j$ и каждая категория порождена набором взаимоортогональных исключительных пучков $(E_1^i, \ldots, E_s^i)$: $\mathrm{Hom}^\bullet(E_p^i, E_q^i)=0$ для всех p и q. Эти данные можно представлять как исключительный набор, разбитый на отрезки с полностью ортогональными пучками, входящими в один отрезок.

Категории $\mathcal{A}_i$ являются допустимыми согласно теореме 3.2, поэтому их можно перестраивать.

ТЕОРЕМА 9.5. *При сформулированных предположениях набор* $\{E_j^i; \forall i, j\}$ *является сильным исключительным набором. Его сильная исключительность сохраняется при перестройках через категории* $\mathcal{A}_i$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.3.

Замечание. а) Количество категорий на единицу больше, чем размерность многообразия.

б) При перестройках через подкатегорию $\mathcal{A}_i$ исключительные объекты, входящие в набор, будут чистыми пучками.

в) Утверждение теоремы перестает быть верным, если перестраивать через часть исключительных объектов, входящих в одну категорию $\mathcal{A}_i$.

Наборы для квадрик и грассманианов, как показано в [12], удовлетворяют условиям теоремы, откуда немедленно следует кошулевость и самосогласованность соответствующих алгебр.

В заключение я благодарю А. Л. Городенцева, М. М. Капранова, И. А. Панина за многочисленные полезные обсуждения и А. Н. Рудакова, А. Н. Тюрина — за внимание и поддержку.

Литература

1. *Бейлинсон А. А.* Когерентные пучки на $\mathbf{P}^n$ и проблемы линейной алгебры//Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12, № 3. С. 68—69.
2. *Beilinson A. A., Bernstein J.* Localisation dès $\mathfrak{G}$-modules//C. R. A. S. 1981. V. 292.
3. *Beilinson A. A., Bernstein J. N., Delingne P.* Faisceaux pervers//Asterisque. 1981. № 100.
4. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Функторы Кокстера и теорема Габриэля//Успехи матем. наук. 1973. Т. 28, № 2. С. 19—33.
5. *Brenner S., Butler M. C. R.* Generalizations of the Bernstein — Gelfand — Ponomaryov reflection functors//Lect. Notes in Math. 1980. № 832.
6. *Verdier J.-L.* Catégories dérivées//Lect. Notes in Math. 1977. № 569. P. 262—311.
7. *Городенцев А. Л.* Перестройки исключительных расслоений на $\mathbf{P}^n$//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, № 1. С. 3—15.
8. *Городенцев А. Л., Рудаков А. Н.* Exceptional vector bundles on projective spaces// Duke. Math. J. 1987. V. 54, № 1. P. 115—130.
9. *Dreset J.-M.* Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbf{P}^2$//Ann. Ec. N. Sup. 1985. T. 18. P. 193—244.
10. *Капранов М. М.* Производная категория когерентных пучков на многообразиях Грассмана//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 1. С. 192—202.
11. *Капранов М. М.* Производная категория когерентных пучков на квадрике//Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20, № 2. С. 67.
12. *Капранов М. М.* On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces//Invent. Math. 1988. № 2. P. 479—508.
13. *Mac Pherson R., Vilonen K.* Elementary construction of perverse sheaves//Invent. Math. 1986. № 84. P. 403—425.
14. *Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.
15. *Priddy S.* Koszul complexes//Transactions of AMS. 1970. № 152. P. 39—60.
16. *Серр Ж.-П.* Когерентные алгебраические пучки//Расслоенные пространства и их приложения. М.: ИЛ, 1958. С. 372—458.
17. *Swan R. G.* K-theory of quadric hypersurfaces//Ann. Math. 1985. V. 121, № 1. P. 113—153.
18. *Рудаков А. Н.* Исключительные расслоения на квадрике//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, № 4. С. 788—812.

Поступила в редакцию
29.III.1988