УДК 513.6

© БОНДАЛ А. И., КАПРАНОВ М. М.

ПРЕДСТАВИМЫЕ ФУНКТОРЫ, ФУНКТОРЫ СЕРРА И ПЕРЕСТРОЙКИ

Настоящая работа посвящена изучению триангулированных категорий методом «развинчивания». Точнее говоря, основным объектом изучения является триангулированная категория $\mathscr{A}$, снабженная фильтрацией $W_0\mathscr{A}\subset W_1\mathscr{A}\subset\ldots\subset\mathscr{A}$, где каждая $W_i\mathscr{A}$ есть толстая подкатегория (в смысле [9]) в $\mathscr{A}$, допускающая сопряженный функтор к вложению $W_i\mathscr{A}\to\mathscr{A}$. Это понятие обобщает следующие два класса примеров. Типичным примером первого класса является случай, когда $\mathscr{A}$ есть производная категория $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^n)$ когерентных пучков на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$. По теореме Бейлинсона [1] $\mathscr{A}$ порождена (как триангулированная категория) пучками $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}(1)$, $\ldots$, $\mathcal{O}(n)$, и мы можем рассмотреть подкатегорию $W_i\mathscr{A}$, порожденную $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}(1)$, $\ldots$, $\mathcal{O}(i)$, где $0\leqslant i\leqslant n$. Более общо, вместо набора $\{\mathcal{O}(i),\ 0\leqslant i\leqslant n\}$ можно рассмотреть другие исключительные наборы, изучавшиеся в работах [6, 16]. Другой класс примеров относится к ситуации, когда $\mathscr{A}$ есть полная подкатегория в производной категории пучков на пространстве X, конструктивных относительно некоторой стратификации S (см., например, [2]). В этом случае можно определить подкатегорию $W_i\mathscr{A}$, состоящую из комплексов, все пучки когомологий которых имеют носитель на объединении стратов размерности $\leqslant i$.

Многие свойства факторкатегорий $W_i\mathscr{A}/W_{i-1}\mathscr{A}$ наследуются самой категорией $\mathscr{A}$. Мы показываем, что к числу таких свойств относится представимость всех когомологических функторов $\mathscr{A}\to\mathrm{Vect}$, доказывая тем самым для широкого класса триангулированных категорий аналог теоремы Брауна об обобщенных теориях когомологий на гомотопической категории пространств. Как следствие мы получаем представимость всех когомологических функторов на производной категории пучков на проективном алгебраическом многообразии.

Представимость когомологических функторов тесно связана с вопросами двойственности [8]. Мы называем *функтором Серра* на триангулированной категории $\mathscr{A}$ такой точный функтор $F:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$, что имеется естественная двойственность $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y, F(X))^*$. В примерах первого типа F является, очевидно, композицией сдвига на размерность многообразия и подкрутки на канонический класс. В примерах второго типа наличие и свойства функтора Серра менее очевидны. Они будут изучены в следующей работе. Укажем лишь, что в случае стратификации $\mathbf{C}^n$ координатными плоскостями функтором Серра является сдвинутое на n (в производной категории) геометрическое преобразование Фурье, изучавшееся в [11].

Если на каждой факторкатегории $W_i\mathscr{A}/W_{i-1}\mathscr{A}$ задана t-структура, то идеология извращенных пучков [2] позволяет построить t-структуру на $\mathscr{A}$, являющуюся их склейкой.

Конструкция Дрезе [16] и Городенцена — Рудакова [6] перестроек исключительных расслоений на $\mathbf{P}^n$ допускает общекатегорное обобщение на допустимые фильтрации путем перехода к частичным ортогоналам. Мы рассматриваем вопрос о том, при каких условиях это возможно. Оказывается, что это тесно связано с представимостью функторов и существованием функтора Серра в объемлющей категории. Применение склейки к получающимся так фильтрациям позволяет построить множество новых t-структур на категории $\mathcal{A}$.

Основным полем в работе является, из соображений простоты, поле комплексных чисел. Все триангулированные категории предполагаются $\mathbf{C}$-линейными.

Мы благодарим В. Я. Пидстригача за очень полезные обсуждения.

§ 0. Матрасы

0.1. Пусть $\mathcal{A}$ — триангулированная категория, $A \to B \to C$ и $X \to Y \to Z$ — два отмеченных треугольника. Они порождают диаграмму Hom-ов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & \mathrm{Hom}(A, X) & \to & \mathrm{Hom}(A, Y) & \to & \mathrm{Hom}(A, Z) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & \mathrm{Hom}(B, X) & \to & \mathrm{Hom}(B, Y) & \to & \mathrm{Hom}(B, Z) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & \mathrm{Hom}(C, X) & \to & \mathrm{Hom}(C, Y) & \to & \mathrm{Hom}(C, Z) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow &
\end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна и имеет точные строки и столбцы. Рассмотрим ее как бикомплекс $(K^{\cdot\cdot}, d, \delta)$. Тогда $K^{i,j} \simeq K^{i+3,j-3}$ с естественным отождествлением дифференциалов. Иначе говоря, $K^{\cdot\cdot} \simeq K^{\cdot\cdot}[-3, 3]$. Бикомплекс с такими свойствами будем называть *3-периодичным.*

Аксиомы триангулированной категории накладывают дополнительные ограничения на бикомплекс Hom-ов. Аксиома TR3 (всякий коммутативный квадрат продолжается до морфизма отмеченных треугольников) приводит к следующему определению.

0.2. Определение. 3-периодичный бикомплекс $(K^{\cdot\cdot}, d; \delta)$ будем называть *матрасом*[1], если строки и столбцы $K^{\cdot\cdot}$ точны и для каждой пары $x \in K^{i,j}$, $y \in K^{i+1,j-1}$ таких, что $dx = \delta y$, существует $z \in K^{i+2,j-2}$ такой, что $\delta z = dy$, $dz = \delta x$ (в последнем равенстве использовано отождествление $K^{i,j} \simeq K^{i+3,j-3}$).

Аксиома TR3 дает то, что бикомплекс Hom-ов между двумя отмеченными треугольниками является матрасом. Вообще говоря, этот матрас может быть бесконечным во все стороны. Если, однако, в категории $\mathcal{A}$ между любыми двумя объектами имеется только конечное число Ext-ов, отличных от нуля, то $K^{i,j} = 0$ при $|i+j| > N$ для некоторого N. 3-периодичный бикомплекс с такими свойствами будем называть *ограниченным.*

0.3. Пусть Bic — категория ограниченных 3-периодических бикомплексов конечномерных векторных пространств. Мы сейчас покажем, что эта категория является ручной (в смысле [13]), и найдем все неразложимые объекты. Прежде всего, каждому бикомплексу $K^{\cdot\cdot}$ с коммутирующими дифференциалами d и δ можно сопоставить бикомплекс с антикоммутирующими дифференциалами, заменив для каждой пары (i, j) такой,

---

[1] Термин принадлежит А. Л. Городенцеву.

что $i+j$ четно, дифференциал d: $K^{i,j} \to K^{i+1,j}$ на $(-d)$. Эта процедура не нарушает 3-периодичности.

Рассмотрим теперь внешнюю алгебру $\Lambda = \Lambda[\xi, \eta]$ с двумя образующими ξ и η. Введем в ней $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/3)$-градуировку, полагая $\deg \xi = (1, \bar{1})$, $\deg \eta = (1, -\bar{1})$. Тогда категория Bic эквивалентна категории $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/3)$-градуированных Λ-модулей, конечномерных над $\mathbf{C}$, которую обозначим $\mathcal{M}_3(\Lambda)$. Мы будем говорить о Λ-модуле, отвечающем бикомплексу, памятуя о произведенных переменах знака у d.

Пусть также $\mathcal{M}(\Lambda)$ — категория $\mathbf{Z}$-градуированных Λ-модулей (относительно градуировки $\deg \xi = \deg \eta = 1$ на Λ). При работе с Λ-модулями полезно использовать интуицию работы [3], т. е. соответствие между $\Lambda[\xi, \eta]$-модулями и комплексами пучков на $\mathbf{P}^1$.

Неразложимые объекты в производной категории $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^1)$ суть сдвиги обратимых пучков $\mathcal{O}(i)$, $i \in \mathbf{Z}$, и пучков $V_{\lambda,n}$, $\lambda \in \mathbf{P}^1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, состоящих из струй порядка n функций в точке λ (см. [4]). Как показано в [3], всякий модуль V из $\mathcal{M}(\Lambda)$ разлагается в сумму $F \oplus V_{\min}$, где F — свободный модуль, а $V_{\min}$ — редуцированный (в котором $\xi\eta$ действует нулем), и слагаемые в этой сумме определены однозначно по V с точностью до изоморфизма. Используя описание $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^1)$ как факторкатегории $\mathcal{M}(\Lambda)$ по подкатегории свободных модулей, данное в [3], мы получаем, что неразложимые объекты в $\mathcal{M}(\Lambda)$ исчерпываются, с точностью до сдвига, следующими:

а) Свободный модуль Λ с одной образующей.

б) Модули вида $\{\underset{-1}{S^n\Xi}, \underset{0}{S^{n+1}\Xi}\}$ с естественным действием, где $n \geqslant 0$, $\Xi = \mathbf{C}\xi \oplus \mathbf{C}\eta$, S^n — симметрическая степень, с естественным действием Ξ. (Это правильный модуль, отвечающий $\mathcal{O}(n+1)$.)

б′) Модули вида $\{\underset{0}{S^n\Xi^*}, \underset{1}{S^{n-1}\Xi^*}\}$, $n \geqslant 0$ (это правильный модуль, отвечающий $\mathcal{O}(-n)$).

в) Для каждого $\lambda \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbf{N}$ модуль $M_{\lambda,n} = \{\underset{-1}{\mathbf{C}^n}, \underset{0}{\mathbf{C}^n}\}$, в котором ξ действует тождественным преобразованием, а η — жордановой клеткой

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots 0 \;\; 1 \\ 0 & \ldots & \ldots 0 \;\; \lambda \end{pmatrix}.$$

(Это правильный модуль, отвечающий $V_{\lambda,n-1}$.)

в′) Модуль $M_{\infty,n} = \{\underset{-1}{\mathbf{C}^n}, \underset{0}{\mathbf{C}^n}\}$, в котором ξ действует жордановой клеткой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 0 \;\; 1 \\ 0 & 0 & \ldots 0 \;\; 0 \end{pmatrix},$$

а η — тождественным отображением. (Это правильный модуль, отвечающий $V_{\infty,n-1}$.)

0.4. Учет дополнительной $\mathbf{Z}/3$-градуировки в предыдущих рассмотрениях производится так. Пусть σ — образующая вспомогательной группы

$\mathbf{Z}/3$, $\varepsilon=\sqrt[3]{1}$. Тогда $\mathbf{Z}/3$-градуировка в векторном пространстве V (это то же самое, что действие $\mathbf{Z}/3$: V_i, где $i=\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \in \mathbf{Z}/3$) состоит из тех v, для которых $\sigma v=\varepsilon^i v$. В нашей ситуации зададим также действие $\mathbf{Z}/3$ на внешней алгебре $\Lambda[\xi, \eta]$, полагая $\sigma\xi=\varepsilon\xi$, $\sigma\eta=\varepsilon^{-1}\eta$. Тогда $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/3)$ — градуированный Λ-модуль — это не что иное, как $\mathbf{Z}$-градуированный Λ-модуль, снабженный автоморфизмом σ, $\sigma^3=1$, Λ-полулинейным в том смысле, что $\sigma(\lambda m)=\sigma(\lambda)\sigma(m)$, где $\sigma(\lambda)$ определено выше. Иначе говоря, это $\mathbf{Z}$-градуированный модуль над скрученным групповым кольцом $\Lambda[\mathbf{Z}/3]$.

Действие $\mathbf{Z}/3$ на внешней алгебре $\Lambda[\xi, \eta]$ задает действие $\mathbf{Z}/3$ на проективной прямой $\mathbf{P}^1=\mathbf{P}(\Xi)$: образующая σ имеет две неподвижные точки 0 и ∞. Собственное число дифференциала $d\sigma$ в 0 есть ε, а в ∞—$\varepsilon^2=\varepsilon^{-1}$, т. е. σ есть поворот в комплексной плоскости относительно нуля на 120°.

Подобно тому, как $\mathbf{Z}$-градуированные Λ-модули задают комплексы пучков на $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{Z}$-градуированные $\Lambda[\mathbf{Z}/3]$-модули задают $\mathbf{Z}/3$-эквивариантные комплексы пучков на $\mathbf{P}^1$ относительно построенного действия $\mathbf{Z}/3$. Обозначим категорию $\mathbf{Z}/3$-эквивариантных когерентных пучков на $\mathbf{P}^1$ через $\mathrm{Sh}_3(\mathbf{P}^1)$ и через $D^b(\mathrm{Sh}_3(\mathbf{P}^1))$ — соответствующую производную категорию. В категории $\mathcal{M}_3(\Lambda)$ проективные объекты совпадают с инъективными, и рассуждения И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда и С. И. Гельфанда [3] легко обобщаются на эквивариантный случай, давая следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Категория* $D^b(\mathrm{Sh}_3(\mathbf{P}^1))$ *эквивалентна стабилизации абелевой категории* $\mathcal{M}_3(\Lambda)=\Lambda[\mathbf{Z}/3]$-mod, *т. е. ее факторкатегории по классу проективных объектов.*

Аналогичная теорема верна для любого действия конечной группы на проективном пространстве.

0.5. Нетрудно найти неразложимые объекты в категории $D^b(\mathrm{Sh}_3(\mathbf{P}^1))$. Поскольку абелева категория $\mathrm{Sh}_3(\mathbf{P}^1)$ имеет гомологическую размерность 1, все такие объекты являются сдвигами настоящих $\mathbf{Z}/3$-пучков на $\mathbf{P}^1$. Неразложимые же $\mathbf{Z}/3$-пучки суть: $\mathcal{O}(i)$, $i\in\mathbf{Z}$; $V_{\lambda,n}$, $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\in\{0, \infty\}$ и $V_{\lambda,n}\oplus V_{\sigma(\lambda),n}\oplus V_{\sigma^2(\lambda),n}$, $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\in\mathbf{P}^1-\{0, \infty\}$.

Из сформулированной выше обобщенной теоремы Бернштейна — Гельфанда — Гельфанда, вытекает, что неразложимые объекты в $\mathcal{M}_3(\Lambda)$ исчерпываются проективными объектами и $\Lambda[\mathbf{Z}/3]$-модулями, отвечающими перечисленным выше пучкам. Сформулируем ответ в явном виде.

0.6. Предложение. *Неразложимые* 3-*периодичные бикомплексы исчерпываются сдвигами следующих*:

а)
$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \to & \mathbf{C} & \rightleftarrows & \mathbf{C} & \to & 0 & \to & \dots \\
 & & \updownarrows & & \updownarrows & & \uparrow & & \\
\dots & \to & \mathbf{C} & \rightleftarrows & \mathbf{C} & \to & 0 & \to & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\dots & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & \dots \\
 & \uparrow & & & \dots\dots & & & &
\end{array}$$
(*проективный* $\Lambda[\mathbf{Z}/3]$-*модуль*)

б)
$$\begin{array}{ccccccc}
(S^n\Xi)_{\bar{0}} & \to & (S^{n+1}\Xi)_{\bar{2}} & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & (S^n\Xi)_{\bar{1}} & \to & (S^{n+1}\Xi)_{\bar{0}} & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & (S^n\Xi)_{\bar{2}} & \to & \dots
\end{array}$$

где индекс $\bar{i}$ означает собственное подпространство оператора σ со значением ε^i.

$$\text{б}')\quad \begin{tikzcd}
{} & & & \\
(S^n\Xi)^*_{\bar 0} \arrow[u] \arrow[r] & (S^{n-1}\Xi)^*_{\bar 2} & & \\
& (S^n\Xi)^*_{\bar 1} \arrow[u] \arrow[r] & (S^{n-1}\Xi)^*_{\bar 0} & \\
& & (S^n\Xi)^*_{\bar 2} \arrow[u] \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

в) *$\mathbf{Z}/3$-градуированные модули $\widetilde{M}_{0,n}$ и $\widetilde{M}_{\infty,n}$, отвечающие $M_{0,n}$ и $M_{\infty,n}$. Чтобы написать их, введем переменную t такую, что $t^n=0$. Тогда $\widetilde{M}_{0,n}$ имеет вид*

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\substack{i\equiv 0(3)\\ i\in[0,n-1]}} \mathbf{C}\,t^i \arrow[r, "\xi"] & \bigoplus\limits_{i\equiv 0(3)} \mathbf{C}\,t^i & \\
& \bigoplus\limits_{i\equiv -1(3)} \mathbf{C}\,t^i \arrow[u, "\eta"] \arrow[r] & \bigoplus\limits_{i\equiv -1(3)} \mathbf{C}\,t^i \\
& & \bigoplus\limits_{i\equiv -2(3)} \mathbf{C}\,t^i \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(*ξ действует тождественно, η действует умножением на t*). *Модуль $\widetilde{M}_{\infty,n}$ устроен аналогично с заменой ролей ξ и η.*

г) *Бикомплексы $\widetilde{M}_{\lambda,n}$ для $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbf{N}$, имеющие вид*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathbf{C}^n & \\
& \mathbf{C}^n \arrow[u] \arrow[r, "\xi"] & \mathbf{C}^n \\
& & \mathbf{C}^n \arrow[u, "\eta"] \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

ξ действует тождественным оператором, η — жордановой клеткой

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \dots & \lambda\quad 1 \\ 0 & 0 \dots & 0\quad \lambda \end{pmatrix}.$$

При этом $\widetilde{M}_{\lambda,n}\cong\widetilde{M}_{\varepsilon\lambda,n}$.

Доказательство предоставляется читателю. Конечно, использование подхода из [3] не является необходимым, однако оно проясняет ситуацию.

Перейдем теперь к основному вопросу настоящего параграфа — выясним, когда 3-периодический бикомплекс является матрасом. Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы все неразложимые компоненты бикомплекса были матрасами.

0.7. Предложение. *Среди неразложимых 3-периодических бикомплексов матрасами являются бикомплексы $\widetilde{M}_{\varepsilon^k,n}$ и только они.*

Доказательство элементарно.

Отсюда вытекает, что все естественные операции с 3-периодическими бикомплексами ($\Leftrightarrow\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/3)$-градуированными Λ-модулями), будучи примененными к матрасам, дают матрасы. Среди таких операций отметим покомпонентную дуализацию (над $\mathbf{C}$), а также тензорное произведение (над $\mathbf{C}$) двух Λ-модулей.

0.8. Следствие. *Диаграмма, двойственная к матрасу, есть матрас. Тензорное произведение над* $\mathbf{C}$ *двух* $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/3)$*-градуированных* Λ*-модулей, отвечающих матрасам, также отвечает матрасу.*

Полезна также следующая переформулировка предложения 0.7.

0.9. Предложение. $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/3)$*-градуированный* $\Lambda[\xi,\eta]$*-модуль* $M^{\bullet}$ *задает матрас в том и только том случае, когда все дифференциалы вида* $d_\lambda=\lambda_0\xi+\lambda_1\eta$ *задают на* $M^{\bullet}$ *структуру точного комплекса при* $(\lambda_0/\lambda_1)^3\neq 1$.

§ 1. Ортогоналы, допустимые подкатегории и сопряженные функторы

1.1. Пусть $\mathscr{A}$ — аддитивная категория, $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ — полная подкатегория. *Правым ортогоналом* к $\mathscr{B}$ называется полная подкатегория $\mathscr{B}^{\perp}\subset\mathscr{A}$, состоящая из таких объектов $\mathscr{C}$, что $\mathrm{Hom}(B, C)=0$ для всех $B\in\mathscr{B}$. Аналогично определяется левый ортогонал $^{\perp}\mathscr{B}$. Ясно, что $\mathscr{B}^{\perp}$ и $^{\perp}\mathscr{B}$— строго полные аддитивные подкатегории в $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A}$ — триангулированная категория, а $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ — триангулированная подкатегория, то $\mathscr{B}^{\perp}$ и $^{\perp}\mathscr{B}$ — также триангулированные подкатегории. Категория $\mathscr{B}$ содержится во вторых ортогоналах $^{\perp}(\mathscr{B}^{\perp})$ и $(^{\perp}\mathscr{B})^{\perp}$. Если необходимо указание на объемлющую категорию $\mathscr{A}$, то ортогоналы будут обозначаться так: $(\mathscr{B}^{\perp})_{\mathscr{A}}$.

1.2. Определение. Пусть $\mathscr{A}$ — триангулированная категория, $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Будем говорить, что $\mathscr{B}$ *допустима справа* (соответственно *слева*), если для каждого $X\in\mathscr{A}$ существует отмеченный треугольник $B\to X\to C$, где $B\in\mathscr{B}$, $C\in\mathscr{B}^{\perp}$ (соответственно $D\to X\to B$, где $D\in{}^{\perp}\mathscr{B}$, $B\in\mathscr{B}$). Подкатегория называется *двусторонне допустимой*, если она допустима справа и слева.

1.3. Удобно переформулировать условия допустимости в терминах существования функторов, сопряженных к функтору вложения $\mathscr{B}\hookrightarrow\mathscr{A}$. Напомним, что если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — произвольные категории, $f\colon\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ — ковариантный функтор, то функтор $g\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ называется *сопряженным справа* к f (а f — сопряженным слева к g), если заданы бифункториальные изоморфизмы:

$$\chi_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(f(B), A)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, g(A))$$

для всех $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$.

Отметим следующее обстоятельство.

1.4. Предложение. *Пусть* $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ *— триангулированные категории,* $f\colon\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ *— функтор. Если* f *сопряжен справа или слева к точному функтору, то* f *сам точен.*

Доказательство. Пусть $g\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ — точный функтор и f сопряжен к g, например, слева. Пусть $B_1\to B_2\to B_3$— отмеченный треугольник в $\mathscr{B}$. Нам надо доказать, что треугольник $f(B_1)\to f(B_2)\to f(B_3)$ отмеченный в $\mathscr{A}$. Пусть C — третий член какого-либо отмеченного треугольника $f(B_1)\to f(B_2)\to C$, содержащего наш морфизм $f(B_1)\to f(B_2)$. Будем строить морфизм из нашего треугольника в этот отмеченный. Имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(f(B_3), C)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B_3, g(C)).$$

Рассмотрим в $\mathscr{B}$ два треугольника:

$$\begin{array}{ccccccc} \to B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \to & \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ \to gf(B_1) & \to & gf(B_2) & \to & g(C) & \to & \end{array} \qquad (1.1)$$

Для $i=1, 2$ имеем канонические морфизмы

$$\gamma_i\colon B_i \to gf(B_i), \qquad \gamma_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B_i, gf(B_i)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(f(B_i), f(B_i)),$$

отвечающие $\mathrm{id}_{f(B_i)}$. Можно, следовательно, построить морфизм γ: $B_3 \to g(C)$ так, чтобы $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma)$ составляли морфизм треугольников. Пусть φ: $f(B_3) \to C$ отвечает γ: $B_3 \to g(C)$ при изоморфизме сопряжения. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} f(B_1) & \to & f(B_2) & \to & f(B_3) & \to & f(B_1)[1] \\ \| & & \| & & \downarrow\varphi & & \| \\ f(B_1) & \to & f(B_2) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & f(B_1)[1] \end{array} \tag{1.2}$$

есть морфизм треугольников: ее коммутативность вытекает из коммутативности (1.1) с помощью изоморфизмов сопряжения. Поэтому φ — изоморфизм и треугольник $f(B_1) \to f(B_2) \to f(B_3)$ отмеченный.

Следующее предложение доказано в работе [4].

1.5. Предложение. *Пусть $\mathscr{B}$ — строго полная триангулированная подкатегория в триангулированной категории $\mathscr{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathscr{B}$ допустима справа (соответственно слева),*

б) *функтор вложения $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{A}$ имеет правый (соответственно левый) сопряженный,*

в) *$\mathscr{A}$ порождена $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^{\perp}$ (соответственно ${}^{\perp}\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}$) как триангулированная категория.*

Укажем только, что правый (соответственно левый) сопряженный функтор к вложению сопоставляет объекту $A \in \mathscr{A}$ компоненту B отмеченного треугольника $B \to A \to C$, где $B \in \mathscr{B}$, $C \in \mathscr{B}^{\perp}$ (соответственно треугольника $D \to A \to B$, где $D \in {}^{\perp}\mathscr{B}$, $B \in \mathscr{B}$).

1.6. Предложение. *Пусть $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — допустимая справа (соответственно слева) подкатегория. Тогда $\mathscr{B}$ — толстая подкатегория в $\mathscr{A}$ и проекция $\mathscr{B}^{\perp} \to \mathscr{A}/\mathscr{B}$ (соответственно ${}^{\perp}\mathscr{B} \to \mathscr{A}/\mathscr{B}$) есть эквивалентность категорий.*

Доказательство этого предложения, равно как и следующей леммы, предоставляется читателю.

1.7. ЛЕММА. *Если $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — допустимая справа подкатегория, $\mathscr{C} = \mathscr{B}^{\perp}$, то ${}^{\perp}\mathscr{C} = \mathscr{B}$.*

1.8. Определение. Подкатегория $\mathscr{B}$ называется ∞-*допустимой*, если все итерированные правые и левые ортогоналы к $\mathscr{B}$ допустимы. Она называется $+\infty$ (соответственно $-\infty$)-*допустимой*, если допустимы все итерированные правые (соответственно левые) ортогоналы.

Мы будем иногда обозначать $\mathscr{B}^{\perp\perp}$ через $L\mathscr{B}$, а ${}^{\perp\perp}\mathscr{B}$ — через $R\mathscr{B}$ и называть их *левой* и *правой перестройкой* (в согласии с работой Городенцева — Рудакова [6]).

1.9. ЛЕММА. *Пусть $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — допустимая подкатегория, $\mathscr{D} = {}^{\perp}\mathscr{B}$, $\mathscr{C} = \mathscr{B}^{\perp}$, g: $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ — функтор, сопряженный слева вложению $\mathscr{C} \subsetneq \mathscr{A}$. Тогда функтор $\gamma_{\mathscr{D}} = g|_{\mathscr{D}}$: $\mathscr{D} \to \mathscr{C}$ есть эквивалентность категорий.*

Доказательство. Пусть h: $\mathscr{A} \to \mathscr{D}$ — функтор, сопряженный справа вложению $\mathscr{D} \subsetneq \mathscr{A}$. Ограничение $h|_{\mathscr{C}}$ является квазиобратным к $\gamma_{\mathscr{D}}$. Будем называть функтор $\gamma_{\mathscr{D}}$ *перестройкой $\mathscr{D}$ через $\mathscr{B} = \mathscr{D}^{\perp}$.*

1.10. Предложение. *Пусть $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — ∞-допустимая подкатегория, f: $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ — функтор вложения. Существует бесконечная последовательность точных функторов $f_{(i)}$: $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$, $f^{(i)}$: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ $(i \in \mathbf{Z})$ таких, что $f_{(0)} = f$ и $f_{(i)}$ сопряжен слева к $f^{(i)}$ и справа к $f^{(i-1)}$ для всех i.*

Доказательство. Для $i\geqslant 0$ $f_{(i)}$ получается как композиция перестроек $\mathcal{B}\simeq\mathcal{B}^{\perp(2i)}\hookrightarrow\mathcal{A}$. Функтор $f^{(i)}$ есть композиция $\mathcal{A}\to\mathcal{B}^{\perp(2i)}$ (функтор, сопряженный справа к вложению $\mathcal{B}^{\perp(2i)}\hookrightarrow\mathcal{A}$) и обратных перестроек $\mathcal{B}^{\perp(2i)}\to\mathcal{B}$. Для $i<0$ доказательство аналогично.

1.11. ЛЕММА. *Если подкатегория $\mathcal{C}$ допустима слева (соответственно справа) в $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ — в $\mathcal{A}$, то $\mathcal{C}$ допустима слева (соответственно справа) в $\mathcal{A}$.*

Доказательство очевидно.

1.12. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ — строго полная триангулированная подкатегория в триангулированной категории $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{B}_1$ — подкатегория в $\mathcal{B}$, допустимая справа, $\mathcal{B}_2=(\mathcal{B}_1{}^{\perp})_{\mathcal{B}}$. Предположим, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ обе допустимы слева (соответственно справа) в $\mathcal{A}$. Тогда и $\mathcal{B}$ допустима слева (соответственно справа) в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ допустимы слева в $\mathcal{A}$ и $X\in\mathcal{A}$. Разложим X в отмеченный треугольник ${}^{\perp}B_2\to X\to B_2$, где ${}^{\perp}B_2\in{}^{\perp}\mathcal{B}_2$, $B_2\in\mathcal{B}_2$. Теперь разложим ${}^{\perp}B_2$ в треугольник ${}^{\perp}B_1\to{}^{\perp}B_2\to B_1$, где ${}^{\perp}B_1\in{}^{\perp}\mathcal{B}_1$, $B_1\in\mathcal{B}_1$. Так как ${}^{\perp}B_2$ и B_1 лежат в $\mathcal{B}_2$, то ${}^{\perp}B_1\in{}^{\perp}\mathcal{B}_2$, т. е. ${}^{\perp}B_1\in{}^{\perp}\mathcal{B}_2\cap\cap{}^{\perp}\mathcal{B}_1={}^{\perp}\mathcal{B}$. Этим доказано, что $\mathcal{A}$ порождается $\mathcal{B}$ и ${}^{\perp}\mathcal{B}$.

§ 2. Представимость функторов и насыщенные категории

2.1. Будем говорить, что триангулированная категория $\mathcal{A}$ *имеет конечный тип*, если для любых E, $F\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каждое $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(E,F)$ конечномерно и почти все $\mathrm{Ext}^i=0$. В этом параграфе мы будем рассматривать только такие триангулированные категории. Контравариантный когомологический функтор $h\colon\mathcal{A}\to\mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}}$ будем называть *функтором конечного типа*, если для каждого $E\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ пространства $h^i(E)=h(E[-i])$ равны нулю для почти всех i. Аналогично для ковариантных функторов.

Пусть $\Phi\colon\mathcal{A}\to D^b(\mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}})$ — точный контравариатный функтор. Тогда функтор $h=H^0\circ\Phi$ является когомологическим функтором конечного типа. Полезно иметь в виду следующее простое обстоятельство.

2.2. ЛЕММА. *Сопоставление $\Phi\mapsto H^0\circ\Phi$ задает эквивалентность между категорией точных функторов $\mathcal{A}\to D^b(\mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}})$ и категорией когомологических функторов конечного типа $\mathcal{A}\to\mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}}$.*

Доказательство. Обозначим первую из категорий, о которых идет речь в лемме, через $\mathrm{Ex}(\mathcal{A})$, а вторую — через $\mathrm{Coh}(\mathcal{A})$. Зададим функтор $t\colon\mathrm{Coh}(\mathcal{A})\to\mathrm{Ex}(\mathcal{A})$, рассматривая $h^{\bullet}(E)$ для $E\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ как комплекс с нулевым дифференциалом. Покажем, что $t(h)$ действительно будет точным функтором. Пусть $B\to A\to C$ — отмеченный треугольник в $\mathcal{A}$. Соответствующую длинную точную последовательность значений $h^{\bullet}$ можно записать в виде:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] h^{\bullet}(C) \arrow[rr] & & h^{\bullet}(A) \arrow[dl] \\ & h^{\bullet}(B) \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Покажем, что этот треугольник будет отмеченным в $D^b(\mathrm{Vect})$. Для этого заметим, что всякая длинная точная последовательность векторных пространств является прямой суммой элементарных последовательностей вида $V\xrightarrow{\sim}V$. Поэтому наш треугольник является конечной прямой суммой треугольников вида

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] V[i] \arrow[rr, "\sim"] & & V[i] \arrow[dl] \\ & 0 \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

и их поворотов. Так как каждый такой треугольник является отмеченным, то таковым будет и треугольник (2.1). Покажем теперь, что функторы $\mathrm{Ex}(\mathcal{A}) \underset{t}{\overset{H^0}{\rightleftarrows}} \mathrm{Coh}(\mathcal{A})$ квазиобратны друг другу. Ясно, что для $h \in \mathrm{Coh}(\mathcal{A})$ $H^0(t(h)) = h$. Далее заметим, что функтор $H^{\cdot}$ из $D^b(\mathrm{Vect})$ в категорию градуированных векторных пространств является эквивалентностью. Поэтому для $\Phi \in \mathrm{Ex}(\mathcal{A})$ имеем $t(H^0(\Phi)) \simeq \Phi$.

Напомним определение представимых функторов.

2.3. Если X — объект категории $\mathcal{A}$, то через h_X и h^X мы будем обозначать функторы $\mathrm{Hom}(-, X)$ и $\mathrm{Hom}(X, -)$ из $\mathcal{A}$ в Vect. Функтор h_X контравариантен, а h^X ковариантен. Контравариантный (соответственно ковариантный) функтор $\mathcal{A} \to \mathrm{Vect}$ будем называть *представимым*, если он изоморфен функтору вида h_X (соответственно h^X) для некоторого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Представляющий объект X, если он существует, определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Следующая известная лемма [7] будет постоянно использоваться.

2.4. ЛЕММА. а) *Пусть $\mathcal{A}$ — категория, h: $\mathcal{A} \to \mathrm{Sets}$ — контравариантный когомологический функтор, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Тогда множество естественных преобразований $h_X \to h$ естественно отождествляется с $h(X)$. В частности, множество естественных преобразований $h_X \to h_Y$ отождествляется с* $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

б) *Пусть k: $\mathcal{A} \to \mathrm{Sets}$ — ковариантный функтор. Множество естественных преобразований $h^X \to k$ естественно отождествляется с $k(X)$. В частности, естественное преобразование $h^X \to h^Y$ — это то же самое, что морфизм $Y \to X$.*

Доказательство почти очевидно. Если h: $\mathcal{A} \to \mathrm{Sets}$ — контравариантный функтор и $u \in h(X)$, то каждому элементу f множества $h_X(Z) = \mathrm{Hom}(Z, X)$ соответствует элемент $h(f)$ множества $h(Z)$, что и задает естественное преобразование $h_X \to h$. Обратно, если задано такое преобразование T, то рассмотрим индуцированное им отображение $h_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) \to h(X)$. Если $u \in h(X)$ — образ тождественного морфизма при этом отображении, то T задается элементом u в вышеприведенном смысле.

2.5. Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — триангулированная категория конечного типа. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ *насыщена справа* (соответственно *слева*), если всякий контравариантный (соответственно ковариантный) когомологический функтор конечного типа $\mathcal{A} \to \mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}}$ представим.

Пример. Категория $D^b(\mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}})$ насыщена как слева, так и справа. Если h — контравариантный когомологический функтор, то представляющим объектом является комплекс с тривиальным дифференциалом, i-ый член которого есть $h(\mathbf{C}[-i])$. Аналогично для ковариантных функторов.

2.6. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ насыщена справа (соответственно слева). Предположим, что $\mathcal{B}$ вложена в триангулированную категорию $\mathcal{A}$ как полная триангулированная подкатегория. Тогда $\mathcal{B}$ допустима справа (соответственно слева).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ насыщена справа и $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Рассмотрим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$: $\mathcal{B} \to \mathrm{Vect}$. Пусть $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ — его представляющий объект, т. е. для

$$\forall B_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B_1, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B_1, X).$$

Взяв $B_1 = B$, получим канонический морфизм γ: $B \to X$, отвечающий тождественному морфизму $B \to B$. Пусть C — третий член точного треугольника $B \xrightarrow{\gamma} X \to C$, содержащего морфизм γ. Тогда $\mathrm{Hom}(B_1, C) = 0$ для $\forall B_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, т. е. $C \in \mathcal{B}^\perp$. Мы доказали, что $\mathcal{B}$ допустима справа. Для насыщенности слева доказательство, очевидно, аналогично.

Замечание. Тройку $\mathcal{B} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — толстая подкатегория в триангулированной категории $\mathcal{A}$, естественно считать аналогом короткой точной последовательности для триангулированных категорий. Если $\mathcal{B}$ допустима, то соответствующую последовательность естественно считать расщепляющейся, ибо существует сечение $\mathcal{A}/\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^\perp \subsetneq \mathcal{A}$. Насыщенные категории, допустимые в каждом вложении, служат аналогами инъективных объектов в категории триангулированных категорий.

2.7. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ — триангулированные категории конечного типа, насыщенные справа, f: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ — точный функтор. Существует бесконечная последовательность точных функторов $f_{(i)}$: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $f^{(i)}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, таких, что $f_{(0)} = f$ и $f_{(i)}$ сопряжен слева к $f^{(i)}$ и справа к $f^{(i-1)}$. Аналогично, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ насыщены слева, то существует последовательность функторов $f_{(i)}$: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $i = 0, -1, -2, \ldots$, $f_{(0)} = f$, $f^{(i)}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $i = -1, -2, \ldots$, с теми же условиями сопряженности, что и выше.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ насыщены справа. Построим функтор $f^{(0)}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Рассмотрим когомологический функтор φ_A: $B \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f(B), A)$ на категории $\mathcal{B}$. Его представляющий объект и есть $f^{(0)}(A)$. Если задан морфизм f: $A_1 \to A_2 \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, то он задает естественное преобразование функторов $\varphi_{A_1} \to \varphi_{A_2}$ и, следовательно, морфизм представляющих объектов $f^{(0)}(A_1) \to f^{(0)}(A_2)$. Этим задается функтор $f^{(0)}$, его точность вытекает из п. 1.4. Применяя те же рассуждения к $f^{(0)}$ с заменой $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$, получаем функтор $f_{(1)}$ и т. д.

2.8. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ — допустимая слева (соответственно справа) подкатегория в насыщенной справа (соответственно слева) триангулированной категории $\mathcal{A}$. Тогда категория $\mathcal{B}$ насыщена справа (соответственно слева).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ допустима слева, $\mathcal{A}$ насыщена справа. Пусть h: $\mathcal{B} \to \mathrm{Vect}$ — контравариантный когомологический функтор. Обозначим через g: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ функтор, сопряженный слева вложению $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$, и рассмотрим когомологический функтор $h' = h \circ g$: $\mathcal{A} \to \mathrm{Vect}$. Пусть $X \in \mathcal{A}$ — его представляющий объект, т. е. для отмеченного треугольника $D \to A \to B$, где $D \in {}^\perp\mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, имеем $h(B) = \mathrm{Hom}(A, X)$. В частности, для $D \in {}^\perp\mathcal{B}$ имеем $\mathrm{Hom}(D, X) = 0$, т. е. $X \in ({}^\perp\mathcal{B})^\perp = \mathcal{B}$. Предложение доказано.

2.9.1. Следствие. *Пусть $\mathcal{B}$ — допустимая справа (соответственно слева) подкатегория в насыщенной справа (соответственно слева) триангулированной категории $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B}$ является $+\infty$-допустимой (соответственно $-\infty$-допустимой).*

Доказательство. Применим предыдущее предложение к подкатегории $\mathcal{B}^\perp$ (соответственно ${}^\perp\mathcal{B}$). Из правой насыщенности категории $\mathcal{B}^\perp$ (соответственно ${}^\perp\mathcal{B}$) следует ее правая допустимость. Тогда рассмотрим $\mathcal{B}^{\perp\perp}$ (соответственно ${}^{\perp\perp}\mathcal{B}$) и т. д.

Для удобства дадим другую формулировку.

2.9.2. Следствие. *Пусть $\mathcal{B}$ — двусторонне допустимая подкатегория в категории $\mathcal{A}$, насыщенной справа и слева. Тогда $\mathcal{B}$ насыщена справа и слева и ∞-допустима.*

В частности, согласно предложению 2.6 всякая насыщенная подкатегория в насыщенной категории ∞-допустима.

Можно ослабить условие насыщенности категории $\mathscr{A}$, заменив его условием существования функтора Серра (см. предложение 3.6), которое, в свою очередь, означает представимость некоторых функторов (см. предложение 3.4).

2.10. ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathscr{B}$—допустимая справа подкатегория в триангулированной категории $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}=\mathscr{B}^{\perp}$. Предположим, что категории $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ являются насыщенными справа (соответственно слева). Тогда таковой является и категория $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ насыщены справа, h: $\mathscr{A}\to\mathrm{Vect}$ — контравариантный когомологический функтор. Пусть $E\in\mathscr{B}$ — объект, представляющий $h|_{\mathscr{B}}$, $F\in\mathscr{C}$ — объект, представляющий функтор $h|_{\mathscr{C}}$, $F'\in\mathscr{C}$ — объект, представляющий функтор $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, E)|_{\mathscr{C}}$. Иными словами,

$$\mathrm{Hom}(B, E)=h(B), \quad B\in\mathscr{B},$$
$$\mathrm{Hom}(C, F)=h(C), \ C\in\mathscr{C}, \quad \mathrm{Hom}(C, E)=\mathrm{Hom}(C, F'), \ C\in\mathscr{C}.$$

Подставим в третье равенство $C=F'$, получив $\mathrm{Hom}(F', E)=\mathrm{Hom}(F', F')$. Пусть при этом отождествлении γ: $F'\to E$ отвечает единичному морфизму. Рассмотрим морфизм $h(\gamma)$: $h(E)\to h(F')$. Так как $E\in\mathscr{B}$, $F'\in\mathscr{C}$, то $h(E)=\mathrm{Hom}(E, E)$, $h(F')=\mathrm{Hom}(F', F)$. Тождественный морфизм id_E переводится отображением $h(\gamma)$ в некоторый морфизм φ: $F'\to F$. Пусть F'' — третий член точного треугольника $F'\to F\to F''\to F'$, содержащего φ. Рассмотрим морфизм δ: $F''\to E[1]$, являющийся композицией граничного гомоморфизма $F''\to F'[1]$ в рассмотренном треугольнике и морфизма $\gamma[1]$: $F'[1]\to E[1]$. Пусть $X\in\mathscr{A}$ — третий член точного треугольника $E\to X\to F''\xrightarrow{\delta} E[1]$, содержащего морфизм δ.

Покажем, что X — представляющий объект для h, т. е. что имеется функториальный изоморфизм $h(A)=\mathrm{Hom}(A, X)$ для $A\in\mathscr{A}$. Рассмотрим сначала случай $A=B\in\mathscr{B}$. Так как $F''\in\mathscr{C}=\mathscr{B}^{\perp}$, то $\mathrm{Hom}(B, X)=\mathrm{Hom}(B, E)=h(B)$ и утверждение очевидно. Теперь рассмотрим случай $A=C\in\mathscr{C}$. Прежде всего, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F'[1] \arrow[d, "\gamma[1]"] \\ F'' \arrow[r, "\delta"] & E[1] \end{tikzcd}$$

Продолжим ее до гомоморфизма точных треугольников:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & F'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F'[1] \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ \arrow[r] & E \arrow[r] & X \arrow[r] & F'' \arrow[r] & E[1] \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Морфизм ε: $F\to X$ задает естественные по $C\in\mathscr{C}$ морфизмы $h(C)=\mathrm{Hom}(C,F)\xrightarrow{\varepsilon_*}\mathrm{Hom}(C, X)$. Покажем, что это изоморфизмы. Для этого рассмотрим морфизмы длинных точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C, F') \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_*"'] & \mathrm{Hom}(C, F) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_*"'] & \mathrm{Hom}(C, F'') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(C, F'[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_*"'] & {} \\ \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C, E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C, X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C, F'') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C, E[1]) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Поскольку γ_* и id — изоморфизмы, ε_*— также изоморфизм. Теперь перейдем к случаю произвольного $A\in\mathscr{A}$.

Построим естественное преобразование функторов ρ: $h_X \to h$, т. е., по лемме 2.4, элемент из $h(X)$. Рассмотрим длинные точные последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} \to h(F'') & \to & h(X) & \longrightarrow & h(E) & \to \\ \uparrow\wr & & \uparrow & & \uparrow\wr & \\ \to h_X(F'') & \longrightarrow & h_X(X) & \longrightarrow & h_X(E) & \to \end{array}$$

отвечающие точному треугольнику $E \to X \to F''$. Как мы видели выше, $h_X(F''[i])$ естественно отождествляется для всех i с $h(F''[i])$, а $h_X(E[i])$ — с $h(E[i])$. Продолжим эти отождествления до морфизма одной точной последовательности в другую. Тогда мы получим изоморфизмы $h_X(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, X) \xrightarrow{\sim} h(X)$. Пусть $u \in h(X)$ — образ тождественного морфизма. Обозначим через ρ: $h_X \to h$ соответствующее естественное преобразование функторов. Покажем, что ρ — изоморфизм функторов, т. е. что для всякого $A \in \mathscr{A}$ морфизм ρ_A: $h_X(A) \to h(A)$ есть изоморфизм. Для этого включим A в треугольник $B \to A \to C$, $B \in \mathscr{B}$, $C \in \mathscr{C}$, и рассмотрим морфизм длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \to h_X(C) & \to & h_X(A) & \to & h_X(B) & \to \\ \downarrow\rho_C & & \downarrow\rho_A & & \downarrow\rho_B & \\ \to h(C) & \to & h(A) & \to & h(B) & \to \end{array}$$

То обстоятельство, что ρ_C и ρ_B — изоморфизмы, проверялось выше. Следовательно, и ρ_A — изоморфизм. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть триангулированная категория $\mathscr{A}$ порождена исключительным набором* [4]. *Тогда $\mathscr{A}$ насыщена справа и слева.*

2.11. ТЕОРЕМА. *Пусть A — конечномерная алгебра с единицей над k, имеющая конечную гомологическую размерность. Тогда $D^b(A\text{-mod})$ (производная категория конечномерных левых A-модулей) насыщена слева и справа.*

Доказательство. Пусть h — контравариантный когомологический функтор конечного типа на $D^b(A\text{-mod})$. Обозначим $h^p(M^\bullet) = h(M^\bullet[-p])$ для $M^\bullet \in D^b(A\text{-mod})$, $p \in \mathbf{Z}$. Так как A является бимодулем над собой, пространства $h^i(A)$ снабжаются структурами левых A-модулей. Если бы мы знали, что функтор h является представимым и представлен комплексом $X^\bullet \in D^b(A\text{-mod})$, то $h^i(A)$ были бы модулями когомологий $H^i(X^\bullet)$. Поэтому наша задача состоит в нахождении комплекса $X^\bullet$ с когомологиями $h^i(A)$. Продолжим анализ ситуации, предполагая, что $X^\bullet$ известен. Обозначим через $\tau_{\leqslant i}(X^\bullet)$ i-е обрезание $X^\bullet$ (см. [2]). Этим задается фильтрация комплекса $X^\bullet$, называемая *канонической*. Ее факторы суть $\mathrm{gr}_i^\tau(X) = H^i(X^\bullet)[-i]$ (модуль когомологий, сидящий на i-м месте). Этой фильтрации отвечает естественная спектральная последовательность, сходящаяся к $\mathrm{Hom}(Y, X)$, где $Y \in D^b(A\text{-mod})$. Из-за наличия переиндексации в $\mathrm{gr}_i^\tau(X)$ нам будет удобно записывать первый член этой спектральной последовательности как член E_2:

$$E_2^{pq} = \mathbf{Ext}^q(Y^\bullet, H^p(X^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{Ext}^{p+q}(Y, X)$$

Ext — это так называемый гипер-Hom, т. е. Hom в производной категории). Она может быть получена также и другим способом. Пусть $P^\bullet$ — проективная резольвента $Y^\bullet$. Рассмотрим ее глупую фильтрацию $\sigma^{\geqslant i}(P^\bullet) = \{0 \to P^i \to \ldots \to P^h\}$ с градуировочными факторами $P^i[-i]$. Применяя к ней когомологический функтор $\mathrm{Hom}(—, X)$, мы также получим некоторую спектральную последовательность, член E_2 которой совпадает с приведенным выше. Заметим, что вторая конструкция годится для любого контравариантного когомологического функтора h. Точнее говоря, имеет место

2.11.1. ЛЕММА. *Для каждого* $N^\bullet \in A$-mod *существует естественная спектральная последовательность*

$$E_2^{pq} = \mathbf{Ext}_A^q(N^\bullet,\ h^p(A)) \Rightarrow h^{p+q}(N^\bullet).$$

Доказательство. Если $N^\bullet = A$, то $\mathrm{Hom}(N^\bullet,\ h^p(A)) = h^p(N^\bullet)$, а $\mathrm{Ext}^q(N^\bullet,\ h^p(A)) = 0$, при $q > 0$. То же верно для любого свободного модуля конечного ранга. Пусть теперь $N^\bullet$ — произвольный комплекс. Возьмем его свободную резольвенту $F^\bullet$ с ее глупой фильтрацией σ. Как и любой фильтрованный комплекс, $(F^\bullet, \sigma)$ задает систему Постникова, а следовательно, и спектральную последовательность (см., например, [10])

$$E_1^{pq} = h^q(\mathrm{gr}_{-p}^{\sigma}(F^\bullet)) = h^q F^{-p} \Rightarrow h^{p+q}(F^\bullet) = h^{p+q}(N^\bullet).$$

Нетрудно видеть, что дифференциал d_1 в ней индуцирован дифференциалами в $F^\bullet$ и $N^\bullet$, и потому $E_2^{pq} = \mathbf{Ext}^q(N^\bullet,\ h^p(A))$.

Можно пойти еще немного дальше. Предположим для определенности, что нетривиальные $h^i(A)$ сосредоточены в степенях от 0 до n, и для каждого $k \in [0, n]$ рассмотрим частичную глупую [2] фильтрацию F в проективной резольвенте $P^\bullet$ комплекса Y:

$$F^{-1}P^\bullet = \sigma^{\geqslant 1}P^\bullet, \quad F^0 P^\bullet = \sigma^{\geqslant 0}P^\bullet, \quad F^1 P^\bullet = \sigma^{\geqslant -k}P^\bullet, \quad F^2 P^\bullet = \sigma^{\geqslant -k-1}P^\bullet,$$

и т. д. (один скачок на k единиц). Если функтор h представим объектом X, то член E_2 спектральной последовательности, отвечающей построенной фильтрации (в комплексе $P^\bullet$), совпадает с членом E_1 спектральной последовательности, отвечающей частичной канонической фильтрации комплекса и функтору $\mathrm{Hom}(-, X)$: $\tau_{\leqslant 0}X \subset \tau_{\leqslant k}X \subset \tau_{\leqslant k+1}X \subset \ldots$ Еще раз подчеркнем во избежание недоразумений, что член E_1, о котором идет речь, из-за переиндексации выглядит, как E_2. Мы будем называть эту спектральную последовательность *k-й спектральной* последовательностью, отвечающей функтору h и комплексу Y. Она сходится к $h(Y)$.

Теперь будем строить по индукции комплекс $X_k^\bullet$, представляющий ограничение функтора h на полную подкатегорию

$$\mathscr{D}^{\leqslant k} = \{M^\bullet \in D^b(A\text{-mod}) : H^i(M^\bullet) = 0 \text{ при } i > k\}.$$

Ясно, что в качестве X_0 можно взять модуль $h^0(A)$ на нулевом месте (мы предполагаем, что $h^i(A) = 0$ при $i < 0$). Рассмотрим построенную в лемме 2.11.1 спектральную последовательность для $Y = h^1(A)$

$$\begin{array}{|lll}
\uparrow \mathrm{Ext}^2(h^1(A),\ h^0(A)) & \mathrm{Ext}^2(h^1(A),\ h^1(A)) & \ldots \\
\mathrm{Ext}^1(h^1(A),\ h^0(A)) & \mathrm{Ext}^1(h^1(A),\ h^1(A)) & \ldots \\
\mathrm{Hom}(h^1(A),\ h^0(A)) & \mathrm{Hom}(h^1(A),\ h^1(A)) & \ldots \longrightarrow \\
\hline
\end{array}$$

и ее дифференциал d_2: $\mathrm{Hom}(h^1(A),\ h^1(A)) \to \mathrm{Ext}^2(h^1(A),\ h^0(A))$. Пусть $\xi = d_2(\mathrm{id})$ и X_1 — третий член треугольника $^1(A)[-2] \xrightarrow{\xi} h^0(A) \to X_1 \to \to \ldots$, содержащего морфизм ξ. Имеют место следующие утверждения:

a$_1$) Объект X_1 представляет ограничение h на подкатегорию $\mathscr{D}^{\leqslant 1}$.

б$_1$) Член E_2 второй спектральной последовательности, отвечающей функтору h и комплексу $N^\bullet$, имеет вид

$$E_2^{0,q} = \mathbf{Ext}^q(N, X_1), \quad E_2^{1,q} = \mathbf{Ext}^{q-1}(N, h^2(A)),$$
$$E_2^{2q} = \mathbf{Ext}^{q-1}(N, h^3(A)).$$

и т. д. Докажем, например, а$_1$). Для этого построим естественное преобразование функторов $h_{X_1}\to h$ (т. е. элемент из $h(X_1)$). Рассмотрим первую спектральную последовательность (т. е. последовательность из леммы 2.11.1), отвечающую функтору h и комплексу X_1. Из нее получаем следующую точную последовательность:

$$0\to \mathrm{Hom}(X_1, h^0(A))\to h(X_1)\to \mathrm{Ext}^{-1}(X_1, h^1(A))\to \mathrm{Ext}^1(X_1, h^0(A))\to$$

С другой стороны, применяя функтор $\mathrm{Hom}(X_1, —)$ к отмеченному треугольнику $h^0(A)\to X_1\to h^1(A)[-1]$, получим точную последовательность

$$0\to \mathrm{Hom}(X_1, h^0(A))\to \mathrm{Hom}(X_1, X_1)\to \mathrm{Ext}^{-1}(X_1, h^1(A))\to \mathrm{Ext}^1(X_1, h^0(A)).$$

Из-за выбора X_1 как конуса ξ в диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X_1, h^0(A)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & h(X_1) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{-1}(X_1, h^1(A)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(X_1, h^0(A)) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X_1, h^0(A)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X_1, X_1) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{-1}(X_1, h^1(A)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X_1, h^0(A)) \end{tikzcd}$$

правый квадрат коммутативен. Поэтому существует изоморфизм φ: $\mathrm{Hom}(X_1, X_1) \xrightarrow{\sim} h(X_1)$, делающий всю диаграмму коммутативной. Пусть $u\in h(X_1)$ — образ тождественного эндоморфизма при φ. Он и задает искомое преобразование ψ_u: $h_{X_1}\to h$. Для того чтобы показать, что ψ_u есть изоморфизм функторов на подкатегории $\mathcal{D}^{\leq 1}$, достаточно в качестве объектов рассмотреть модули $Y\in A$-mod, сидящие на местах ≤ 1. Если Y сидит на месте ≤ 0, то изоморфность ψ_u на Y очевидна. Пусть $Y^\bullet = Y[-1]$ сидит на месте 1. Тогда, выбирая точную последовательность модулей $0\to R\to F\to Y\to 0$, где F свободен, запишем Y в производной категории как комплекс $\left\{\underset{0}{R}\to\underset{1}{F}\right\}$. Для $R\in A$-mod, сидящего на нулевом месте, утверждение об изоморфности уже установлено. Следовательно, нам достаточно показать, что для свободного модуля F ψ_u: $\mathrm{Hom}(F, X_1)\to h(F)$ есть изоморфизм. Но это очевидно. Утверждение а$_1$) доказано. Доказательство б$_1$) мы опустим, так как оно производится сходными рассуждениями.

Теперь построим X_2. Рассмотрим вторую спектральную последовательность, отвечающую функтору h и модулю $h^2(A)$. Там имеется дифференциал d_2: $\mathrm{Hom}(h^2(A), h^2(A))\to \mathrm{Ext}^3(h^2(A), X_1)$. Пусть $\xi' = d_2(\mathrm{id})$ и X_2 — третий член отмеченного треугольника $h^2(A)[-3] \xrightarrow{\xi'} X_1 \to X_2$, содержащего морфизм ξ'. Имеют место следующие утверждения:

а$_2$) Объект X_2 представляет h на подкатегории $\mathcal{D}^{\leq 2}$.

б$_2$) Член E_2 третьей спектральной последовательности, отвечающей функтору h и комплексу $N^\bullet$, имеет вид

$$E_1^{0,q} = \mathbf{Ext}^q(N, X_2), \quad E_2^{1,q} = \mathbf{Ext}^{q-2}(N, h^3(A)), \quad E_2^{2,q} = \mathbf{Ext}^{q-2}(N, h^4(A))$$

и т. д. Продолжая таким образом, построим представляющий объект $X = X_n$. Насыщенность слева доказывается дуальным образом.

2.12. В теореме 2.11 можно позволить алгебре A быть бесконечномерной. Интересным является случай коммутативной алгебры A. В этой ситуации для всякого аддитивного функтора h: $D^b(A\text{-mod})\to\mathrm{Vect}$ и всякого $M^\bullet\in D^b(A\text{-mod})$ пространство $h(M^\bullet)$ наделяется структурой A-модуля. Будем называть когомологический функтор h: $D^b(A\text{-mod})\to\mathrm{Vect}$ функтором конечнопорожденного типа, если для всякого $M^\bullet\in D^b(A\text{-mod})$ только конечное число пространств $h(M^\bullet[i])$ отлично от нуля и все они являются конечнопорожденными A-модулями.

2.13. ТЕОРЕМА. *Пусть A — градуированная коммутативная алгебра с конечным числом образующих. Тогда всякий контравариантный когомологический функтор конечнопорожденного типа из $D^b(A\text{-mod})$ в* Vect *является представимым.*

Доказательство. Действуя так же, как в доказательстве теоремы 2.11, мы получим в качестве представляющего объекта комплекс $X^\bullet$ модулей над алгеброй A. Так как $H^i(X^\bullet)=h^i(A)$, то $H^i(X^\bullet)$ — конечнопорожденные A-модули и только конечное число их отлично от нуля. В этой ситуации нетрудно построить квазиизоморфный $X^\bullet$ комплекс, все члены которого — конечнопорожденные модули. Он и будет представляющим объектом.

2.14. ТЕОРЕМА. *Пусть M — гладкое проективное многообразие. Тогда $D^b_{\mathrm{coh}}(M)$ (производная категория когерентных пучков на M) является насыщенной справа и слева.*

Доказательство. Пусть i: $M\to\mathbf{P}^n$ — вложение в проективное пространство, h: $D^b_{\mathrm{coh}}(M)\to\mathrm{Vect}$ — контравариантный когомологический функтор конечного типа. Пусть $A=H^0(M, \mathcal{O}(i))$ — координатное кольцо M. Теорема Серра [14] дает функтор $N\mapsto\tilde{N}$ из (конечно порожденных) градуированных A-модулей в квазикогерентные (когерентные) пучки на M. Он осуществляет эквивалентность категории когерентных пучков на M и факторкатегории конечнопорожденных градуированных A-модулей по подкатегории конечномерных модулей. Рассмотрим функтор h': $D^b(A\text{-mod})\to A\text{-mod}$,

$$h'(N^\bullet)=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} h(\tilde{N}(-i)).$$

Этот функтор является функтором конечного типа. Действительно, пусть $h^i(\mathcal{O}(j))=0$ для $i\notin[a, b]$, $j=0, 1, \ldots, n$. Покажем, что $h^i(\mathcal{O}(j))=0$ для $i\notin[a-n, b+n]$ и для всех j. Для этого заметим, что теорема Бейлинсона [1] дает двустороннюю резольвенту любого пучка, в том числе и $\mathcal{O}(i)$, через пучки $\mathcal{O}(j)$, где $j=0, 1, \ldots, n$. Нетрудно убедиться, что эта резольвента имеет вид

$$0\to V_0\otimes\mathcal{O}\to V_1\otimes\mathcal{O}(1)\to\ldots\to V_n\otimes\mathcal{O}(n)\to 0,$$

где V_i — векторные пространства. Например, резольвента для $\mathcal{O}(n+1)$:

$$0\to\mathcal{O}\to V\otimes\mathcal{O}(1)\to\Lambda^2 V\otimes\mathcal{O}(2)\to\ldots\to\Lambda^n V\otimes\mathcal{O}(n)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(n+1),$$

здесь $\mathbf{P}^n=\mathbf{P}(V)$, где $\dim V=n+1$, а последняя стрелка означает квазиизоморфизм. Рассмотрим спектральную последовательность, построенную по этой резольвенте для функтора h:

$$E_1^{pq}=V_p\otimes h^q(\mathcal{O}(p))\Rightarrow h^{p+q}(\mathcal{O}(i)).$$

Так как все ненулевые члены E_1 этой спектральной последовательности сосредоточены в прямоугольнике $[0, n]\times[a, b]$, то $h^k(\mathcal{O}(i))$ равны нулю при $k<a-n$ или $k>b+n$.

Теперь к функтору h' применим рассуждения из доказательства теоремы 2.11. Априори это рассуждение может дать конечный комплекс, но из бесконечнопорожденных модулей. Обозначим его $X^\cdot$. Во всяком случае соответствующий комплекс квазикогерентных пучков $\tilde{X}^\cdot$ на M представляет функтор h. Теперь покажем, что $\tilde{X}^\cdot$ квазиизоморфен конечному комплексу когерентных пучков на M. Для этого рассмотрим когомологический функтор $h''=h\circ \mathrm{Li}^*$: $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^n)\to \mathrm{Vect}$. Так как $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^n)$ порождена исключительным набором (теорема Бейлинсона), то h'' представим неким $Y^\cdot\in D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^n)$, т. е. для любого $\mathcal{F}^\cdot\in D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbf{P}^n)$ имеем изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Li}^*\mathcal{F}, \tilde{X}^\cdot)=h''(\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, Y^\cdot),$$

т. е., в силу сопряженности Li^* и i_*, $Y^\cdot=i_*\tilde{X}^\cdot$. Отсюда вытекает, что $\tilde{X}^\cdot\in D^b_{\mathrm{coh}}(M)$.

Этим доказана насыщенность $D^b_{\mathrm{coh}}(M)$ справа. Насыщенность слева вытекает из антиэквивалентности $D^b_{\mathrm{coh}}(M)\to D^b_{\mathrm{coh}}(M)^{\mathrm{opp}}$, задаваемой отображением $\mathcal{F}^\cdot\mapsto \mathbf{R}\mathbf{Hom}(\mathcal{F}^\cdot, \mathcal{O})$.

§ 3. Функторы Серра

3.1. Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — триангулированная $\mathbf{C}$-линейная категория с конечномерными Hom-ами. Ковариантный аддитивный функтор F: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, коммутирующий со сдвигами, будем называть *функтором Серра*, если он является эквивалентностью категорий и заданы бифункториальные изоморфизмы

$$\varphi_{E,G}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, F(E))^*$$

для E, $G\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, обладающие следующим свойством: композиция

$$(\varphi^{-1}_{F(E),F(G)})^*\circ\varphi_{E,G}\colon \mathrm{Hom}(E, G)\to\mathrm{Hom}(G, F(E))^*\to\mathrm{Hom}(F(E), F(G))$$

совпадает с изоморфизмом, индуцированным F. Набор изоморфизмов $\{\varphi_{E,G}\}$, удовлетворяющий указанному свойству, будет называться *структурой Серра*.

3.2. Примеры. 1) Пусть $\mathcal{A}=D^b(\mathrm{Vect}_{\mathrm{fd}})$ — производная категория конечномерных векторных пространств над $\mathbf{C}$. Тождественный функтор id: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ является функтором Серра.

2) Пусть X — гладкое проективное алгебраическое многообразие, $n=\dim X$, $\mathcal{A}=D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — производная категория когерентных пучков на X, $K_X=\Omega^n_X$ — канонический пучок. Функтор $(-)\otimes K_X[n]$ является функтором Серра на $\mathcal{A}$ в силу двойственности Серра — Гротендика:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})=\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{G}, \mathcal{F}\otimes K_X)^*.$$

3) Пусть A — конечномерная алгебра над $\mathbf{C}$, имеющая конечную гомологическую размерность, $\mathcal{A}=D^b(A\text{-mod})$ — производная категория конечномерных левых A-модулей. Имеются два функтора дуализации, переводящие $D^b(A\text{-mod})$ в $D^b(\mathrm{mor}\text{-}A)$ (правые модули) и наоборот:

$$D^b(A\text{-mod})\xrightarrow{\delta}D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)\xrightarrow{d}D^b(A\text{-mod}),$$
$$\delta(M^\cdot)=\mathrm{RHom}_A(M^\cdot, A);\quad d(M^\cdot)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^\cdot, \mathbf{C}).$$

Композиция $F=d\circ\delta$ называется *функтором Накаямы* и является функтором Серра в категории $\mathscr{A}=D^b(A\text{-mod})$ (см. [12]).

3.3. Предложение. *Всякий функтор Серра является точным функтором, т. е. переводит отмеченные треугольники в отмеченные.*

Доказательство. Пусть $X\to Y\to Z\to X[1]$ — отмеченный треугольник в категории $\mathscr{A}$. Покажем, что треугольник $F(X)\xrightarrow{f}F(Y)\to F(Z)\to F(X)[1]$ отмеченный. Пусть C — третий член некоторого отмеченного треугольника, содержащего морфизм f.

ЛЕММА. *Существует морфизм γ: $C\to F(Z)$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} F(X) & \longrightarrow & F(Y) & \to & C & \to & F(X)[1] \\ \| & & \| & & \downarrow\gamma & & \| \\ F(X) & \to & F(Y) & \to & F(Z) & \to & F(X)[1]. \end{array} \tag{3.1}$$

Прежде чем доказывать лемму, выведем из нее предложение 3.3. Заметим, что нижний треугольник обладает тем свойством, что для любого $A\in\mathscr{A}$ последовательность векторных пространств

$$\ldots\to\mathrm{Hom}(A,F(X))\to\mathrm{Hom}(A,F(Y))\to\mathrm{Hom}(A,F(Z))\to\ldots$$

является точной. Это вытекает из того, что F — эквивалентность категорий, а $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z$ — отмеченный треугольник. Тем же свойством обладает, разумеется, и треугольник

$$F(X)\to F(Y)\to C\xrightarrow{w}F(X)[1].$$

Применяя 5-лемму к морфизму длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \to\mathrm{Hom}(A,F(X)) & \to & \mathrm{Hom}(A,F(Y)) & \to & \mathrm{Hom}(A,C) & \to \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\gamma_* & \\ \to\mathrm{Hom}(A,F(X)) & \to & \mathrm{Hom}(A,F(Y)) & \to & \mathrm{Hom}(A,F(Z)) & \to \end{array}$$

получаем, что γ_* индуцирует изоморфизмы $\mathrm{Hom}(A,C)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(A,F(Z))$ для любого $A\in\mathscr{A}$. Отсюда следует, что γ — изоморфизм. Следовательно, треугольник $F(X)\to F(Y)\leftarrow F(Z)$, изоморфный отмеченному, сам является отмеченным.

Доказательство леммы. Рассмотрим матрас Hom-ов, отвечающий паре отмеченных треугольников $X\to Y\to Z$ и $F(X)\to F(Y)\to C$ в категории $\mathscr{A}$ (по поводу определения матраса см. § 0):

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathrm{Hom}(Y,F(Y)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,C) & \to & \mathrm{Hom}(Y,F(X)[1]) & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathrm{Hom}(Z,F(Y)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Z,C) & \to & \mathrm{Hom}(Z,F(X)[1]) & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathrm{Hom}(X[1],F(Y)) & \to & \mathrm{Hom}(X[1],C) & \to & \mathrm{Hom}(X[1],F(X)[1]) & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

Согласно предложению 0.8, двойственная диаграмма также является матрасом. Запишем ее, используя тот факт, что F — функтор Серра:

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \leftarrow & \mathrm{Hom}(Y,Y) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(C,F(Y)) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(X[1],Y) & \leftarrow \\ & \downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow & \\ \leftarrow & \mathrm{Hom}(Y,Z) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(C,F(Z)) & \xleftarrow{d} & \mathrm{Hom}(X[1],Z) & \leftarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \leftarrow & \mathrm{Hom}(Y,X[1]) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(C,F(X)[1]) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(X,X) & \leftarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

Морфизм $\gamma \in \operatorname{Hom}(C, F(Z))$ удовлетворяет нашим требованиям, если и только если он отображается дифференциалами d и δ соответственно в морфизмы $v \in \operatorname{Hom}(Y, Z)$ и $w \in \operatorname{Hom}(C, F(X)[1])$, входящие в рассматриваемые нами отмеченные треугольники. При этом $v = d(\mathrm{id}_Y)$, $w = d(\mathrm{id}_X)$, а $d(\mathrm{id}_Y) = \delta(\mathrm{id}_X) = u \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Поскольку диаграмма является матрасом, требуемый морфизм γ существует. Лемма доказана, а с ней и предложение 3.3.

3.4. Предложение. а) *Для того чтобы категория $\mathscr{A}$ обладала функтором Серра, необходимо и достаточно, чтобы все контравариантные функторы вида* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, —)^*$ *и ковариантные функторы вида* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(—, X)^*$ *для* $X \in \mathscr{A}$ *были представимы.*

б) *Любые два функтора Серра F_1, F_2 связаны каноническим изоморфизмом функторов (который зависит от выбора структуры Серра, т. е. систем изоморфизмов $\{\varphi_{E,G}\}$).*

Доказательство. а) Ясно, что если F — функтор Серра, то $F(X)$ есть представляющий объект для $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, —)^*$, а $F^{-1}(X)$ — для $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(—, X)^*$. Обратно, пусть все функторы $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, —)^*$, $X \in \mathscr{A}$, представимы. Выберем для каждого X какой-нибудь представляющий объект и обозначим его $F(X)$. Выберем также для каждого X какое-либо естественное преобразование функторов $\psi_X\colon h_{F(X)} \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, —)^*$, являющееся изоморфизмом (такое преобразование задается элементом из $\operatorname{Hom}(X, F(X))^*$, см. лемму 2.4). Всякий морфизм $X \to Y$ в категории $\mathscr{A}$ индуцирует естественное преобразование функторов $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, —)^* \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(Y, —)^*$ и, с помощью отождествлений ψ_X и ψ_Y, морфизм представляющих объектов $F(X) \to F(Y)$. Нетрудно убедиться, что этим задается функтор $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, аддитивный и коммутирующий со сдвигом. Отождествления $\varphi_{E,G}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(E, G) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(G, F(E))^*$ строятся исходя из выбранных отождествлений ψ_E. Тот факт, что F — эквивалентность категорий, вытекает из представимости функторов $\operatorname{Hom}(—, X)^*$. Часть а) доказана. Доказательство б) предоставляется читателю.

3.5. Следствие. *Если $\mathscr{A}$ — триангулированная категория конечного типа, насыщенная справа и слева, то $\mathscr{A}$ обладает функтором Серра.*

Наличие функторов Серра дает возможность проверить ∞-допустимость, т. е. возможность всех перестроек, за конечное число шагов.

3.6. Предложение. *Пусть $\mathscr{A}$ — триангулированная категория, обладающая функтором Серра F, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — допустимая (справа и слева) подкатегория. Тогда $\mathscr{B}$ является ∞-допустимой, и при этом $\mathscr{B}^{\perp\perp} = F(\mathscr{B})$, ${}^{\perp\perp}\mathscr{B} = F^{-1}(\mathscr{B})$.*

Доказательство. Пусть $C \in \mathscr{B}^{\perp}$, т. е. $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C) = 0$ $\forall B \in \mathscr{B}$. Тогда $\operatorname{Hom}(C, F(B)) = \operatorname{Hom}(B, C)^* = 0$, т. е. $F(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}^{\perp\perp}$. Если $L \in \operatorname{Ob} \mathscr{B}^{\perp\perp}$, то $F^{-1}(L) \in \operatorname{Ob}^{\perp}(\mathscr{B}^{\perp})$, а по лемме 1.7 ${}^{\perp}(\mathscr{B}^{\perp}) = \mathscr{B}$. Поэтому $\mathscr{B}^{\perp\perp} = F(\mathscr{B})$. Аналогично ${}^{\perp\perp}\mathscr{B} = F^{-1}(\mathscr{B})$. Следовательно, $\mathscr{B}^{\perp\perp}$ и ${}^{\perp\perp}\mathscr{B}$ — допустимые подкатегории. Продолжая таким образом, установим допустимость всех итерированных ортогоналов.

3.7. Предложение. *Пусть $\mathscr{A}$ — триангулированная категория, $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ — функтор Серра, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — некая допустимая (следовательно, бесконечно допустимая) подкатегория, $\mathscr{D} = {}^{\perp}\mathscr{B}$. Функтор $F_{\mathscr{D}}\colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}$, определяемый как композиция $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}^{\perp\perp} = \mathscr{B}^{\perp}$ и $\gamma_{\mathscr{D}}^{-1}\colon \mathscr{D}^{\perp\perp} \to \mathscr{D}$, где $\gamma_{\mathscr{D}}$ — эквивалентность, определенная в лемме 1.9, является функтором Серра на триангулированной категории $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Пусть $D, D' \in \mathscr{D}$. Имеем отождествления

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(D, D') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(D, D') \xrightarrow{\varphi_{D,D'}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(D', F(D))^*.$$

Заметим теперь, что $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(D', F(D))$ канонически отождествляется с $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(D', F_{\mathscr{D}}(D))$. В самом деле, рассмотрим отмеченный треугольник $D'' \to F(D) \to B''$, где $B'' \in \mathscr{B}$, $D'' \in \mathscr{D}$. Тогда $F_{\mathscr{D}}(D) = D''$. Но, поскольку $\mathrm{Hom}(D', B''[i]) = 0$ для всех i, получаем изоморфизм $\mathrm{Hom}(D', D'') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(D', F(D))$.

3.8. Предложение. *Пусть $\mathscr{A}$ — триангулированная категория, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — допустимая подкатегория, $\mathscr{C} = \mathscr{B}^{\perp}$. Предположим, что подкатегория $\mathscr{C}$ также допустима и в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ имеются функторы Серра $F_{\mathscr{B}}$, $F_{\mathscr{C}}$. Тогда существует функтор Серра на категории $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Мы покажем, что все функторы вида $\mathrm{Hom}(X, -)^*$ и $\mathrm{Hom}(-, X)^*$ на категории $\mathscr{A}$ представимы. Для этого рассмотрим доказательство теоремы 2.10 более подробно. Пусть $h = \mathrm{Hom}(X, -)^*$. Чтобы построить представляющий объект для h, нам нужны: представляющий объект E для $h|_{\mathscr{B}}$ и представляющие объекты для $h|_{\mathscr{C}}$ и $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, E)|_{\mathscr{C}}$. Чтобы построить объект E, разложим X в отмеченный треугольник $R \to X \to B$, где $R \in {}^{\perp}\mathscr{B}$, $B \in \mathscr{B}$. Тогда для всякого $B_1 \in \mathscr{B}$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, B_1) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B_1)$, и потому функтор $h|_{\mathscr{B}} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)^*$ представим объектом $E = F_{\mathscr{B}}(B)$.

Чтобы представить функтор $h|_{\mathscr{C}}$, разложим X в треугольник $B' \to X \to C'$, где $B' \in \mathscr{B}$, $C' \in \mathscr{C}$. Тогда для всякого $C_1 \in \mathscr{C}$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, C_1) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C_1)$, и потому функтор $h|_{\mathscr{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)^*$ представим объектом $F_{\mathscr{C}}(C')$.

Наконец, разложим объект $E \in \mathscr{A}$ в треугольник $C'' \to E \to L$, где $C'' \in \mathscr{C}$, $L \in \mathscr{C}^{\perp}$. Тогда для всякого $C \in \mathscr{C}$ имеем $\mathrm{Hom}(C, E) = \mathrm{Hom}(C, C'')$ и функтор $h_E|_{\mathscr{C}}$ представим объектом $C'' \in \mathscr{C}$. Далее рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 2.10.

Приведем еще одно достаточное условие ∞-допустимости подкатегории.

3.9. Предложение. *Пусть $\mathscr{A}$ — триангулированная категория с функтором Серра F, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — подкатегория, допустимая справа (или слева) и обладающая функтором Серра $F_{\mathscr{B}}$. Тогда $\mathscr{B}$ является ∞-допустимой.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $\mathscr{B}$ допустима справа. В силу предложения 3.6, нам достаточно проверить правую допустимость $\mathscr{B}^{\perp} = \mathscr{C}$. Рассмотрим функтор $F \circ F_{\mathscr{B}}^{-1} \colon \mathscr{B} \to F(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}^{\perp\perp}$.

Для $B \in \mathscr{B}$ имеем

$$\mathrm{Hom}(B, F \circ F_{\mathscr{B}}^{-1}(B)) = \mathrm{Hom}(F_{\mathscr{B}}^{-1}(B), B)^* = \mathrm{Hom}(B, F_{\mathscr{B}}(B))^* = \mathrm{Hom}(B, B),$$

так как F и $F_{\mathscr{B}}$ — функторы Серра. Рассмотрим морфизм $\gamma \colon B \to F \circ F_{\mathscr{B}}^{-1}(B)$, отвечающий id_B при этом отождествлении. Пусть C' — третий член точного треугольника, содержащего γ. Покажем, что $C' \in \mathscr{C} = \mathscr{B}^{\perp}$, т. е. для любого $B' \in \mathscr{B}$ $\mathrm{Hom}(B', C') = 0$. Для этого достаточно показать, что морфизм $\gamma_* \colon \mathrm{Hom}(B', B) \to \mathrm{Hom}(B', F \circ F_{\mathscr{B}}^{-1}(B))$ является изоморфизмом. Но после отождествления

$$\mathrm{Hom}(B', F \circ F_{\mathscr{B}}^{-1}(B)) = \mathrm{Hom}(F_{\mathscr{B}}^{-1}(B), B')^* = \mathrm{Hom}(B, F(B'))^* = \mathrm{Hom}(B', B)$$

морфизм γ_* становится, как легко видеть, тождественным морфизмом. Поэтому $C' \in \mathscr{C}$. Этим доказано, что всякий $B \in \mathscr{B}$ включается в точный треугольник $C' \to B \to R$, где $C' \in \mathscr{C}$, $R \in \mathscr{C}^{\perp}$. Поскольку $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ порождают $\mathscr{A}$, отсюда вытекает, что $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}^{\perp}$ порождают $\mathscr{A}$, т. е. согласно предложению 1.5 подкатегория $\mathscr{C}$ допустима справа.

§ 4. Допустимые фильтрации и их перестройки

4.1. Определение. *Фильтрацией в триангулированной категории* $\mathscr{A}$ называется последовательность строго полных триангулированных подкатегорий

$$\ldots \subset \mathscr{A}_{-1} \subset \mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{A}$$

(конечная или бесконечная) такая, что $\bigcup \mathscr{A}_i = \mathscr{A}$. Фильтрация называется *допустимой* (соответственно *допустимой справа, допустимой слева*), если каждая $\mathscr{A}_i$ есть допустимая (соответственно допустимая справа, допустимая слева) подкатегория в $\mathscr{A}_{i+1}$.

4.2. Пример. Пусть (X, S) — стратифицированное аналитическое пространство, $\mathcal{A} = D_C^b(X, S)$ — полная подкатегория в производной категории пучков векторных пространств на X, состоящая из комплексов, все пучки когомологий которых конструктивны относительно S, т. е. локально постоянны на стратах. Положим $\mathscr{A}_i$ состоящей из пучков комплексов, все пучки когомологий которых имеют носитель на объединении стратов размерности $\leqslant i$. Это дает допустимую фильтрацию на $\mathscr{A}$. Сопряженными функторами к вложениям i_*: $\mathscr{A}_k \hookrightarrow \mathscr{A}_{k+1}$ являются $i^!$ и i^* (см. [2]).

4.3. Иногда мы будем обозначать фильтрации буквами, например W, и вместо $\mathscr{A}_i$ писать $W_i\mathscr{A}$. Пусть фильтрация W допустима справа (соответственно слева). Тогда каждая $W_i\mathscr{A}$ есть толстая подкатегория в $W_{i+1}\mathscr{A}$. Факторкатегория $W_i\mathscr{A}/W_{i-1}\mathscr{A}$ будет обозначаться в этом случае $\mathrm{gr}_i^W\mathscr{A}$. Она отождествляется с правым (соответственно левым) ортогоналом к $W_{i-1}\mathscr{A}$ в $W_i\mathscr{A}$. Правые ортогоналы будем обозначать $\mathscr{B}_i$, левые ортогоналы $\mathscr{C}_i$. Категории $\mathscr{B}_i$ обладают свойством полуортогональности: $\mathrm{Hom}(B_i, B_j) = 0$ для любых $B_i \in \mathscr{B}_i$, $B_j \in \mathscr{B}_j$, если $i < j$.

Аналогичным свойством обладают $\mathscr{C}_i$. Нетрудно видеть, что задание фильтрации в категории $\mathscr{A}$, допустимой справа, равносильно заданию полуортогонального набора подкатегорий $\mathscr{B}_i \subset \mathscr{A}$, в совокупности порождающих $\mathscr{A}$ как триангулированную категорию. Это выводится из предложения 1.5.

4.4. Предложение. *Пусть* W — *праводопустимая фильтрация в категории* $\mathscr{A}$. *Тогда*

а) *Каждая* $W_i\mathscr{A}$ *праводопустима в* $\mathscr{A}$. *Обозначим через* $w_{\leqslant i}$: $\mathscr{A} \to W_i\mathscr{A}$ *функторы, сопряженные справа вложениям* $W_i\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}$.

б) *Существуют точные функторы* gr_i: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}_i$ *такие, что ограничения* $\mathrm{gr}_i|_{W_i\mathscr{A}}$ *сопряжены слева функторам вложения* $\mathscr{B}_i \hookrightarrow W_i\mathcal{A}$, *а* $\mathrm{gr}_i|_{W_{i-1}\mathscr{A}} = 0$.

в) *Существуют естественные преобразования функторов* $w_{\leqslant i} \to \mathrm{gr}_i$, $w_{\leqslant i-1} \to w_{\leqslant i}$, $\mathrm{gr}_i \to w_{\leqslant i-1}$ [1], *образующие для любого* $A \in \mathscr{A}$ *точный треугольник*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{gr}_i A \arrow[dr, "+1"] & \\ w_{\leqslant i}A \arrow[ur] & & w_{\leqslant i-1}A \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Замечание 1. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \ldots \arrow[dr] & & \mathrm{gr}_i A \arrow[dr, "+1"] & & \mathrm{gr}_{i-1}A \arrow[dr] & & \ldots & \\ \ldots & & w_{\leqslant i}A \arrow[ll] \arrow[ur] & & w_{\leqslant i-1}A \arrow[ll] \arrow[ur] & & w_{\leqslant i-2}A \arrow[ll] \arrow[ur] & & \ldots \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

называется *системой Постникова* [15]. Она позволяет для каждого когомологического функтора h: $\mathcal{A}\to\mathrm{Vect}$ построить спектральную последовательность с первым членом $E_1^{\cdot\cdot}=h^{\cdot}(\mathrm{gr}.A)$. При подходящих условиях конечности эта спектральная последовательность сходится к $h^{\cdot}(A)$ [10].

Замечание 2. Утверждение, аналогичное предложению 4.4, имеет место для леводопустимых фильтраций.

Доказательство. Пункт а) вытекает из леммы 1.11. Функтор gr_i в п. б) есть композиция $w_{\leqslant i}$: $\mathcal{A}\to W_i\mathcal{A}$ и левого сопряженного вложению $\mathcal{B}_i\to W_i\mathcal{A}$. Детали предоставляются читателю.

4.5. Определение. Пусть $(\mathcal{A},\ \mathcal{A}_i=W_i\mathcal{A})$ — триангулированная категория с праводопустимой фильтрацией, $\mathcal{B}_i=(\mathcal{A}_{i-1}^{\perp})_{\mathcal{A}_i}$ — соответствующий полуортогональный набор категорий. Будем говорить, что фильтрация W (или, что то же самое, набор $\{\mathcal{B}_i\}$) является *сильно допустимой* (сокращенно *s-допустимой*), если каждое $\mathcal{B}_i$ является допустимой (справа и слева) подкатегорией в $\mathcal{A}$.

Для всякого набора подкатегорий $\{\mathcal{C}_i\subset\mathcal{A}\}_{i\in I}$ через $\langle\mathcal{C}_i\rangle_{i\in I}$ будем обозначать минимальную строго полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{A}$, содержащую все $\mathcal{C}_i$.

4.6. ЛЕММА. *Пусть $\{\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2,\ \mathcal{B}_3\}$ — полуортогональный s-допустимый набор подкатегорий, порождающий категорию $\mathcal{A}$. Тогда подкатегория $\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$ является допустимой.*

Доказательство. Мы знаем, что $\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$ допустима справа. Докажем ее левую допустимость. Согласно предложению 1.5 достаточно показать, что $\mathcal{A}$ порождена ${}^{\perp}\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$ и $\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$. Более того, достаточно показать, что всякий объект $B_3\in\mathcal{B}_3$ лежит в $\langle{}^{\perp}\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle,\ \mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$. Так как $\mathcal{B}_2$ допустима слева в $\mathcal{A}$, существует точный треугольник $R\to\to B_3\to B_2$, где $B_2\in\mathcal{B}_2$, $R\in{}^{\perp}\mathcal{B}_2$. Поскольку B_1 допустима слева в $\mathcal{A}$, существует точный треугольник $T\to R\to B_1$, где $B_1\in\mathcal{B}_1$, $T\in{}^{\perp}\mathcal{B}_1$. Покажем, что $T\in{}^{\perp}\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$. В самом деле, как R, так и B_1 лежат в левом ортогонале к $\mathcal{B}_2$. Следовательно, $T\in{}^{\perp}\langle\mathcal{B}_1\rangle\cap{}^{\perp}\langle\mathcal{B}_2\rangle={}^{\perp}\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$. Отсюда следует, что R, а за ним и B_3, лежат в подкатегории $\langle{}^{\perp}\langle\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle,\ \mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2\rangle$. Лемма доказана.

4.7. Предложение *Пусть W — конечная s-допустимая фильтрация на $\mathcal{A}$. Если на каждой $\mathrm{gr}_i^W\mathcal{A}$ есть функтор Серра F_i, то существует функтор Серра F на всей категории $\mathcal{A}$.*

Доказательство. В случае фильтрации длины 2 предложение доказано в п. 3.7. В общем случае используем лемму 4.6 и индукцию по длине фильтрации.

Обращение этого утверждения следует из предложения 3.7.

4.8. Определение. Пусть W — фильтрация на триангулированной категории $\mathcal{A}$ и $i\in\mathbf{Z}$. Определим новую фильтрацию σ_iW на $\mathcal{A}$, полагая $(\sigma_iW)_j\mathcal{A}=W_j\mathcal{A}$ при $j\neq i$, а $(\sigma_iW)_i\mathcal{A}$ равной полной триангулированной подкатегории в $\mathcal{A}$, порожденной $W_{i-1}\mathcal{A}$ и $(W_iA)_{W_{i+1}\mathcal{A}}^{\perp}=\mathcal{B}_{i+1}$.

Заменяя в этом определении правый ортогонал на левый, получим еще одну фильтрацию $\check{\sigma}_iW$. Фильтрации σ_iW и $\check{\sigma}_iW$ будут называться *правой* и *левой перестройками фильтрации W на месте i*.

Ясно, что для допустимой фильтрации W $\check{\sigma}_i\sigma_iW=W$.

4.9. Определение. Фильтрацию W будем называть *∞-допустимой*, если все итерированные правые и левые перестройки W являются допустимыми фильтрациями.

4.9. Предложение. а) *σ_i и $\check{\sigma}_i$ задают взаимно обратные биекции множества ∞-допустимых фильтраций в $\mathscr{A}$ на себя.*

б) *Преобразования σ_i удовлетворяют следующим соотношениям: $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ при $|i-j|\geqslant 2$; $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Иначе говоря, σ_i определяют действие на множестве ∞-допустимых фильтраций группы кос с бесконечным числом образующих, которая будет обозначаться $B(\infty)$.*

Доказательство. Нуждаются в проверке только соотношения $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Пусть, например, $i=0$, а фильтрация W задается полуортогональной последовательностью подкатегорий $\{\mathscr{B}_i\}$. Нетрудно видеть, что как $\sigma_0\sigma_1\sigma_0 W$, так и $\sigma_1\sigma_0\sigma_1 W$ задаются последовательностью

$$\ldots, \mathscr{B}_{-2}, \mathscr{B}_{-1}, \mathscr{B}_2, (\mathscr{B}_1)^{\perp\perp}_{\langle\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\rangle}, (\mathscr{B}_0)^{\perp\perp}_{\langle\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\rangle}, \mathscr{B}_3, \mathscr{B}_4, \ldots$$

Предложение доказано.

4.10. Пусть $S(\infty)$ — бесконечная симметрическая группа, ρ: $B(\infty)\to S(\infty)$ — канонический гомоморфизм. Если $g\in B(\infty)$ и W — ∞-допустимая фильтрация, то факторы $\mathrm{gr}^W_{\cdot}\mathscr{A}$ и $\mathrm{gr}^{g(W)}_{\cdot}\mathscr{A}$ отличаются действием перестановки $\rho(g)$: $\mathrm{gr}_i^{g(W)}\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathrm{gr}^W_{\rho(g)(i)}\mathscr{A}$.

4.11. Предложение. *Пусть конечная фильтрация W s-допустима и в категориях $\mathrm{gr}_i{}^W\mathscr{A}$ есть функторы Серра. Тогда фильтрация W ∞-допустима.*

Доказательство. Пусть фильтрация задается полуортогональным набором $\{\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n\}$, причем все $\mathscr{B}_i$ допустимы. Выберем некоторое i и рассмотрим полуортогональный набор

$$\ldots, \mathscr{B}_{i-1}, \mathscr{B}_{i+1}, (\mathscr{B}_{i+1})^{\perp}_{\langle\mathscr{B}_i,\mathscr{B}_{i+1}\rangle}, \mathscr{B}_{i+2}, \ldots,$$

отвечающий перестроенной фильтрации $\sigma_i W$. Покажем, что подкатегория $L\mathscr{B}_i=(\mathscr{B}_{i+1})^{\perp}_{\langle\mathscr{B}_i,\mathscr{B}_{i+1}\rangle}$ является допустимой в $\mathscr{A}$. Для этого достаточно показать, что $L\mathscr{B}_i$ допустима в $\langle\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_{i+1}\rangle$ (из соображений транзитивности, см. лемму 1.11.), так как подкатегория $\langle\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_{i+1}\rangle$ допустима (лемма 4.6). На категории $\langle\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_{i+1}\rangle$ существует, согласно предложению 3.8, функтор Серра F. Он переводит $\mathscr{B}_i$ в $L\mathscr{B}_i$. Так как F — эквивалентность категорий, то из допустимости $\mathscr{B}_i$ вытекает допустимость $L\mathscr{B}_i$. Этим доказано, что $\sigma_i W$ является s-допустимой. Аналогично доказывается s-допустимость $\check{\sigma}_i W$. Предложение доказано.

4.12. Предложение. *Пусть конечная фильтрация W в категории $\mathscr{A}$ допустима (справа и слева), а в категории $\mathscr{A}$ имеется функтор Серра F. Тогда W ∞-допустима.*

Доказательство. Докажем, что W является s-допустимой, а $\mathrm{gr}_i{}^W\mathscr{A}$ обладают функторами Серра. Пусть $\{\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n\}$ — полуортогональный набор, задающий фильтрацию. Подкатегория $W_{n-1}\mathscr{A}=\langle\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_{n-1}\rangle$ является допустимой. Поэтому $\mathscr{B}_n$ допустима слева, а $\mathscr{C}_n={}^{\perp}\langle\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_{n-1}\rangle$ — справа. Функтор Серра F переводит $\mathscr{C}_n$ в $\mathscr{B}_n$ (см. п. 3.6). Поэтому $\mathscr{C}_n$ и $\mathscr{B}_n$ допустимы (с двух сторон), ибо F — эквивалентность категорий. Следовательно (предложение 3.7), в категориях $\mathscr{B}_n=\mathrm{gr}_n{}^W\mathscr{A}$ и $W_{n-1}\mathscr{A}$ имеются функторы Серра. Далее применяем те же рассуждения к $W_{n-1}\mathscr{A}$ и получаем, что $W_{n-2}\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}_{n-1}$ допустимы в $W_{n-1}\mathscr{A}$ (а следовательно, по транзитивности, и в $\mathscr{A}$) и обладают функторами Серра. Используя индукцию, получаем s-допустимость W и наличие функторов Серра в $\mathrm{gr}_i^W\mathcal{A}$. Остается воспользоваться предложением 4.11.

4.13. Предложение. *Пусть* W — *фильтрация в триангулированной категории* $\mathcal{A}$. *Предположим, что все* $W_i\mathcal{A}$ — *толстые подкатегории в* $W_{i+1}\mathcal{A}$, *а категории* $\mathrm{gr}_i^W\mathcal{A}$ *насыщены справа и слева. Тогда фильтрация* W ∞*-допустима.*

Доказательство очевидно (см. п. 2.9).

Литература

1. *Бейлинсон А. А.* Когерентные пучки на $\mathbf{P}^n$ и проблемы линейной алгебры//Функц. анализ. 1987. Т. 12, № 3. С. 68—69.
2. *Beilinson A. A., Bernstein I. N., Deligne P.* Faisceaux pervers//Asterisque. 1981. № 100.
3. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.* Алгебраические расслоения на $\mathbf{P}^n$ и задачи линейной алгебры//Функц. анализ. 1978. Т. 12, № 3. С. 66—67.
4. *Бондал А. И.* Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53, № 1. С. 25—44.
5. *Гельфанд С. И.* Пучки на $\mathbf{P}^n$ и задачи линейной алгебры: приложение к русскому изданию книги К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1986.
6. *Gorodentsev A. L., Rudakov A. N.* Exceptional bundles on projectives spaces//Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 115—130.
7. *Brown E.* Cohomology theories//Ann. Math. 1962. V. 75. P. 467—484.
8. *Hartshorne R.* Residues and duality//Lect. Notes in Math. 1966. № 20.
9. *Verdier J.-L.* Categories derivées//Lect. Notes in Math. 1977. № 569. P. 262—311.
10. *Kapranov M. M.* On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces//Invent. Math. 1988. V. 92. P. 479—508.
11. *Brylinsky J. L.* Transformations canoniques et transformation de Fourier//Asterisque. 1985. № 140. P. 3—134.
12. *Happel D.* On the derived category of a finitedimensional algebra//Comm. Math. Helv. 1987. V. 62. P. 339—389.
13. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms//Lect. Notes in Math. 1984. № 1099.
14. *Серр Ж.-П.* Когерентные алгебраические пучки//Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1957. С. 372—450.
15. *Уайтхед Дж.* Новейшие достижения в теории гомотопий. М.: Мир, 1971.
16. *Drezet J.-M.* Fibrés exceptionels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur $P_2(C)$// Math. Ann. 1986. B. 285. P. 25—48.

Поступила в редакцию
21.VI.1988