1. Векторные расслоения.

1.1. **Проективное пространство и топология Зарисского.** Пусть $V = \mathbb{C}^{n+1}$ — комплексное векторное пространство. Комплексное *проективное пространство* $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ — это множество одномерных подпространств в V. Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ обладает естественной структурой гладкого комплексного (алгебраического) многообразия.

А именно, пусть $\{z_0, \dots, z_n\}$ — базис пространства V^*. Тогда всякая точка проективного пространства P определяется своими *однородными координатами* $(z_0(P) : \dots : z_n(P))$. Однородные координаты определены с точностью до одновременного умножения на ненулевое число. Рассмотрим подмножество $U_i = \{P \in \mathbb{P}(V) \mid z_i(P) \neq 0\} \subset \mathbb{P}(V)$. Отображение

$$(z_0 : \dots : z_n) \quad \mapsto \quad \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

задает изоморфизм $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$. Более того, легко видеть, что $\phi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{A}^n - \mathbb{A}^{n-1}$ и функции перехода $\phi_j \cdot \phi_i^{-1} : \mathbb{A}^n - \mathbb{A}^{n-1} \to \mathbb{A}^n - \mathbb{A}^{n-1}$ голоморфны (и даже рациональны). Значит открытые подмножества $U_0, \dots, U_n$ образуют открытое покрытие проективного пространства $\mathbb{P}^n$. Будем называть такое покрытие *стандартным*.

В алгебраической геометрии проективное пространство $\mathbb{P}^n$ снабжают *топологией Зарисского*. Стандартную топологию принято называть *аналитической*.

Определение. Подмножество $X \subset \mathbb{P}^n$ называется *замкнутым по Зарисскому*, если существуют однородные многочлены $F_1, \dots, F_r$ от $z_0, \dots, z_n$, такие что

$$X = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n \mid F_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = F_r(z_0, \dots, z_n) = 0\}.$$

Упражнение 1.1. Проверьте, что замкнутые по Зарисскому множества порождают топологию.

Определение. *Проективным многообразием* будем называть замкнутое по Зарисскому подмножество проективного пространства. *Алгебраическим многообразием* мы будем называть любое *квазипроективное многообразие*, то есть открытое (по Зарисскому) подмножество проективного многообразия. Алгебраическое многообразие называется *аффинным*, если оно изоморфно замкнутому подмножеству аффинного пространства.

1.2. **Векторные расслоения.**

Определение. *Векторное расслоение* ранга r на алгебраическом многообразии X — это пара (E, π_E), где E — алгебраическое многообразие, а $\pi_E : E \to X$ — голоморфное отображение, такие что всякая точка $x \in X$ обладает окрестностью (в топологии Зарисского) U_x и тривиализацией $\phi_x : U_x \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} \pi_E^{-1}(U_x)$, так что отображение

$$(U_x \cap U_y) \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\phi_x} \pi_E^{-1}(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\phi_y^{-1}} (U_x \cap U_y) \times \mathbb{C}^r$$

имеет вид $\phi_y^{-1} \cdot \phi_x(z, v) = (z, g_{yx}(z)v)$, где $g_{yx} : U_x \cap U_y \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ — алгебраическое отображение.

Ранг расслоеня E обозначается $r(E)$.

Векторное расслоение можно задавать с помощью коцикла. Пусть $U_\bullet$ — открытое покрытие многообразия X. **Коциклом** (r-мерным) относительно покрытия $U_\bullet$ называется набор алгебраических отображений $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, таких что

$$g_{ij} \cdot g_{ji} = 1, \qquad g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}. \tag{1.2}$$

Коциклы g и g' называются **эквивалентными**, если существуют алгебраические отображения $h_i : U_i \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, такие что

$$g'_{ij} = h_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot h_j.$$

Упражнение 1.3. Покажите, что множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга r на многообразии X находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности r-мерных коциклов.

Замечание. Строго говоря, надо расширить понятие эквивалентности коциклов, чтобы можно было говорить об эквивалентности коциклов, определенных относительно разных покрытий.

Определение. Векторное расслоение ранга 1 называется **линейным расслоением**.

1.3. **Линейные расслоения на $\mathbb{P}^n$.** Будем искать одномерные коциклы на $\mathbb{P}^n$ относительно стандартного покрытия $U_0, \dots, U_n$. Одномерный коцикл это набор функций $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ нигде не обращающихся в нуль.

Упражнение 1.4. Покажите, что всякая не обращающаяся в нуль алгебраическая функция на $U_i \cap U_j$ имеет вид $\lambda(z_j/z_i)^k$.

Значит коцикл имеет вид $g_{ij} = \lambda_{ij}\,(z_j/z_i)^{k_{ij}}$.

Упражнение 1.5. **(1)** Покажите, что из условия коцикла (1.2) следует $k_{ij} = k$ для всех i, j и $\lambda_{ij}\lambda_{jk} = \lambda_{ik}$ для всех i, j, k. **(2)** Покажите, что коцикл g эквивалентен коциклу

$$g_{ij}^{(k)} = (z_j/z_i)^k. \tag{1.6}$$

Определение. Линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$, заданное в стандартном покрытии коциклом (1.6) называется $\mathcal{O}(k)$.

Ясно, что расслоение $\mathcal{O} := \mathcal{O}(0)$ — тривиальное линейное расслоение.

Упражнение 1.7. **(1)** Пусть $E \subset \mathbb{P}(V) \times V$, $E = \{(L, v) \mid v \in L\}$ (здесь $L \in \mathbb{P}(V)$ рассматривается как одномерное подпространство в V), и $\pi_E(L, v) = L$. Покажите, что E — линейное расслоение на $\mathbb{P}(V)$. Расслоение E называется **тавтологическим подрасслоением** на $\mathbb{P}(V)$. **(2)** Покажите, что $E \cong \mathcal{O}(-1)$.

На самом деле можно доказать следующее.

Теорема 1.8. *Всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ имеет вид $\mathcal{O}(k)$.*

1.4. **Функторы.** Векторное расслоение на многообразии X можно себе представлять как семейство векторных пространств, параметризованное точками многообразия X. Соответсвенно, операции и функторы определенные для векторных пространств часто можно послойно применять к векторным расслоениям.

Упражнение 1.9. Пусть E и E' — векторные расслоения на X. **(1)** Определите двойственное расслоение E^*, а также расслоения $E \oplus E'$ и $E \otimes E'$. **(2)** Покажите, что $r(E^*) = r$, $r(E \oplus E') = r(E) + r(E')$ и $r(E \otimes E') = r(E)r(E')$. **(3)** Пусть расслоения E и E' задаются коциклами g и g'. Покажите, что E^*, $E \oplus E'$ и $E \otimes E'$ задаются коциклами $(g^{-1})^T$, $g \oplus g'$ и $g \otimes g'$.

Упражнение 1.10. **(1)** Покажите, что если $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ — линейные расслоения, то $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O} \cong \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}$. **(2)** Проверьте, что множество классов изоморфизма линейных расслоений на X является абелевой группой относительно операции $\otimes$. Эта группа называется группой Пикара многообразия X и обозначается $\operatorname{Pic} X$. **(3)** Докажите, что если $X = \mathbb{P}^n$, то $\mathcal{O}(k)^* \cong \mathcal{O}(-k)$, $\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) \cong \mathcal{O}(k+l)$. Таким образом, $\operatorname{Pic} \mathbb{P}^n = \mathbb{Z}$.

Пусть E и F — векторные расслоения на X. Отображение $f : E \to F$ называется гомоморфизмом векторных расслоений, если $\pi_F \cdot f = \pi_E$ и для любых тривиализаций $\phi_E : U \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} \pi_E^{-1}(U)$, $\phi_F : U \times \mathbb{C}^s \xrightarrow{\sim} \pi_F^{-1}(U)$ имеем

$$\phi_F^{-1} \cdot f \cdot \phi_E(x, v) = (x, f_U(x)v),$$

где f_U — алгебраическое отображение $U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$. Легко видеть, что множество $\operatorname{Hom}(E, F)$ гомоморфизмов из E в F является векторным пространством относительно послойного сложения и умножения на число.

Сечением расслоения E над множеством $U \subset X$ назывется алгебраическое отображение $s : U \to \pi_E^{-1}(U)$, такое что $\pi_E \cdot s = \mathrm{id}_U$. Множество $\Gamma(U, E)$ сечений E над U является векторным пространством относительно послойного сложения и умножения на число.

Упражнение 1.11. **(1)** Докажите изоморфизмы функторов

$$\Gamma(X, E) \cong \operatorname{Hom}(X, E), \qquad \operatorname{Hom}(E, F \otimes G) \cong \operatorname{Hom}(E \otimes F^*, G).$$

(2) Пусть E и F заданы коциклами g и g'. Докажите, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(E, F) &= \{(f_i : U_i \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r(E)}, \mathbb{C}^{r(F)})) \mid f_i = g'_{ij} \cdot f_j \cdot g_{ij}^{-1}\}, \\ \Gamma(X, E) &= \{(s_i : U_i \to \mathbb{C}^{r(E)}) \mid s_i = g_{ij} \cdot s_j\}. \end{aligned}$$

Последовательность векторных расслоений и их гомоморфизмов

$$\dots E_{i-1} \to E_i \to E_{i+1} \to \dots$$

назывется комплексом (точной последовательностью), если она является таковой послойно.

1.5. **Производные функторы.** Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ — абелевы категории. Ковариантный функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ называется точным слева (справа), если для всякой точной последовательности $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ в категории $\mathcal{A}$ последовательность $0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0$ в категории $\mathcal{A}'$ точна везде, кроме правого (соответственно левого) члена. Функтор точный справа и слева одновременно называется точным. Аналогично определяется точные (слева, справа) контравариантные функторы.

Упражнение 1.12. **(1)** Проверьте, что $\Gamma(X, -)$, $\operatorname{Hom}(E, -)$, $\operatorname{Hom}(-, E)$ — точные слева функторы из категории векторных расслоений в категорию векторных пространств. **(2)** Докажите, что функторы $E \mapsto E^*$ и $E \mapsto E \otimes F$ — точные функторы из категории векторных расслоений в себя.

Замечание. Категория векторных расслоений не является абелевой, однако понятие точной последовательности в ней определено, поэтому понятие точности функтора имеет смысл.

Функторы Γ и Hom вообще говоря не являются точными справа. Однако важным фактом является следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.13. *Если X — аффинное многообразие, то функтор $\Gamma(X, -)$ точен.*

Если $\mathcal{A}$ — "хорошая" абелева категория, а F — точный слева функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, то существует единственная с точностью до функториального изоморфизма последовательность функторов $R^0F = F$, R^1F, R^2F, ... из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, таких что для всякой короткой точной последовательности

$$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

в категории $\mathcal{A}$ возникает длинная точная последовательность

$$0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to R^1F(A_1) \to R^1F(A_2) \to R^1F(A_3) \to \dots$$

Аналогично, для точного справа функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ существует единственная с точностью до функториального изоморфизма последовательность функторов $L^0F = F$, L^1F, L^2F, ... таких что для всякой короткой точной последовательности в категории $\mathcal{A}$ возникает длинная точная последовательность

$$\dots \to L^1F(A_1) \to L^1F(A_2) \to L^1F(A_3) \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0.$$

Функтор R^iF (соотв. L^iF) называется i-ым правым (соотв. левым) производным функтором от функтора F.

Упражнение 1.14. Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $G : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$. Докажите, что если F — точен, а G — точен слева, то

$$R^i(G \cdot F) = (R^iG) \cdot F$$

Докажите аналогичные утверждение в случаях, когда F — точен, а G — точен справа, а также когда G — точен, а F — точен слева или справа.

Позже мы вложим категорию векторных расслоений в хорошую абелеву категорию — категорию когерентных пучков. Пока же нам достаточно знать существование такого вложения, чтобы иметь возможность говорить о производных функторах от функторов, определенных на категории векторных расслоений.

Определение. Обозначим через $\mathrm{H}^i(X, -)$ i-ый правый производный функтор от функтора $\Gamma(X, -)$. Функтор $\mathrm{H}^i(X, -)$ называется функтором i-ых когомологий. Заметим, что по определению $\mathrm{H}^0(X, E) = \Gamma(X, E)$.

Аналогично, i-ый правый производный функтор от функтора Hom обозначается Ext^i. Таким образом, $\mathrm{Ext}^0(E, F) = \mathrm{Hom}(E, F)$.

Из теоремы 1.13 легко вытекает

Теорема 1.15. *Если X — аффинное многообразие, то $\mathrm{H}^{>0}(X, -) = 0$.*

Замечание. Приведенное выше определение функтора Ext^i не вполне корректно, так как в нем не указано, по какому аргументу берется производный функтор. Однако, следующее упражнение показывает, что оба способа дают один и тот же ответ.

Упражнение 1.16. Пусть

$$\operatorname{Ext}^i(E, -) = R^i \operatorname{Hom}(E, -), \qquad \operatorname{Ext}'^i(-, F) = R^i \operatorname{Hom}(-, F).$$

Докажите изоморфизм функторов

$$\operatorname{Ext}^i(E, F) \cong \mathrm{H}^i(X, E^* \otimes F) \cong \operatorname{Ext}'^i(E, F).$$

(Указание: воспользуйтесь Упр. 1.14) Таким образом, вычисление функтора Ext для расслоений сводится к вычислению когомологий.

1.6. **Комплекс Чеха.** Пусть E — векторное расслоение на многообразии X и $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$ — открытое покрытие. Рассмотрим последовательность векторных пространств

$$0 \to \mathcal{C}_E^0(U_\bullet) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_E^1(U_\bullet) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_E^2(U_\bullet) \xrightarrow{d} \dots,$$

где

$$\mathcal{C}_E^p(U_\bullet) = \bigoplus_{0 \le i_0 < \dots < i_p \le N} \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E),$$

и для всякого $s = (s_{i_0, \dots, i_p}) \in \mathcal{C}_E^p(U_\bullet)$ положим

$$(ds)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (s_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{p+1}})_{|U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}}.$$

Упражнение 1.17. **(1)** Проверьте, что $d^2 = 0$. **(2)** Покажите, что

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{C}_E^0(U_\bullet) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_E^1(U_\bullet)) = \Gamma(X, E).$$

Согласно Упр. 1.17 (1) последовательность $\mathcal{C}_E^\bullet(U_\bullet)$ является комплексом. Комплекс $\mathcal{C}_E^\bullet(U_\bullet)$ называется комплексом Чеха расслоения E относительно покрытия $U_\bullet$. Когомологии комплекса Чеха называются когомологиями Чеха расслоения E относительно покрытия $U_\bullet$ и обозначаются $\check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet, E) = \mathrm{H}^p(\mathcal{C}_E^\bullet(U_\bullet))$.

Теорема 1.18. *Если все множества U_i являются аффинными, то когомологии Чеха совпадают с обычными когомологиями*

$$\mathrm{H}^p(X, E) = \check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet, E).$$

Набросок доказательства: По Упр. 1.17 (2) имеем $\mathrm{H}^0(X, E) = \check{\mathrm{H}}^0(U_\bullet, E)$. Поэтому по существу достаточно проверить, что для всякой короткой точной последовательности расслоений

$$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$$

возникает длинная точная последовательность когомологий Чеха. Заметим, что морфизмы $E_i \to E_{i+1}$ индуцируют морфизмы комплексов Чеха $\mathcal{C}_{E_i}^\bullet(U_\bullet) \to \mathcal{C}_{E_{i+1}}^\bullet(U_\bullet)$. Далее, если все U_i аффинны, то и всякое пересечение $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ — аффинно, значит по теореме 1.13 последовательность

$$0 \to \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E_1) \to \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E_2) \to \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E_3) \to 0$$

точна. Следовательно, мы имеем точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathcal{C}_{E_1}^\bullet(U_\bullet) \to \mathcal{C}_{E_2}^\bullet(U_\bullet) \to \mathcal{C}_{E_3}^\bullet(U_\bullet) \to 0$$

и “лемма о змее” дает длинную точную последовательность когомологий Чеха.
$\square$

2. Теорема Гротендика.

Сегодня мы докажем несколько важных теорем.

2.1. **Теорема Ботта.** Начнем с вычисления когомологий линейных расслоений на проективных пространствах, но сначала докажем общую теорему об обращении в нуль когомологий.

Теорема 2.1. *Пусть X — n-мерное проективное многообразие. Тогда для любого расслоения E на X имеем $\mathrm{H}^{>n}(X,E)=0$.*

Доказательство: Допустим $X\subset\mathbb{P}^N$. Если $\dim X=n$, то найдется подпространство $\mathbb{P}^{N-n-1}\subset\mathbb{P}^N$, такое что $X\cap\mathbb{P}^{N-n-1}=\emptyset$. Выберем однородные координаты $z_0,\dots,z_N$ на $\mathbb{P}^N$ так, чтобы $\mathbb{P}^{N-n-1}$ задавалось уравнениями $z_0=\dots=z_n=0$. Пусть $U_0,\dots,U_N$ — стандартное покрытие $\mathbb{P}^N$ относительно этих координат. Тогда $\bigcup_{i=0}^n U_i=\mathbb{P}^N-\mathbb{P}^{N-n-1}$, следовательно $X=\bigcup_{i=0}^n(X\cap U_i)$. Всякое $U_i^X=X\cap U_i$ — аффинно, значит $U_\bullet^X=\{U_0^X,\dots,U_n^X\}$ — аффинное покрытие X. По теореме 1.18 имеем $\mathrm{H}^p(X,E)=\check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet^X,E)$, однако покрытие $U_\bullet^X$ состоит из $(n+1)$-го множества, поэтому $\mathcal{C}_E^{>n}(U_\bullet^X)=0$, следовательно $\check{\mathrm{H}}^{>n}(U_\bullet^X,E)=0$. □

Займемся теперь вычислением когомологий проективного пространства.

Теорема 2.2 (Теорема Ботта)**.** *Пусть $\dim V=n+1$. Тогда*

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}(k))=\begin{cases}\mathbf{S}^kV^*, & p=0,\ k\ge 0\\ \mathbf{S}^{-k-n-1}V, & p=n,\ k\le -n-1\\ 0, & \textit{иначе}\end{cases}$$

где $\mathbf{S}^k$ обозначает k-ую симметрическую степень векторного пространства.

Доказательство: Воспользуемся теоремой 1.18, то есть будем вычислять когомологии по Чеху, используя стандартное покрытие $\mathbb{P}(V)=\bigcup_{i=0}^n U_i$. Для удобства добавим к комплексу Чеха $\mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)$ член $\mathcal{C}^{-1}_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)=\Gamma(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}(k))$. Пусть $I=\{i_0<\dots<i_p\}$. Обозначим $U_I:=U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}$. Легко видеть, что

$$\Gamma(U_I,\mathcal{O}(k))=\bigoplus\mathbb{C}z^\alpha,$$

где $z^\alpha:=z_0^{\alpha_0}\cdots z_n^{\alpha_n}$, а суммирование ведется по всем $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$, таким что $\forall i\notin I\ \alpha_i\ge 0$ и $\sum_{i=0}^n\alpha_i=k$. Тем самым расширенный комплекс Чеха $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)$ оказывается градуированным группой $\mathbb{Z}^{n+1}$. Рассмотрим его градуировочную компоненту $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)^\alpha$. Ясно, что

$$\tilde{\mathcal{C}}^p_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)^\alpha=\bigoplus_{I(\alpha)\subset I,\ |I|=p+1}\mathbb{C}z^\alpha,$$

где $I(\alpha)=\{0\le i\le n\mid\alpha_i<0\}$. Отсюда видно, что

$$\tilde{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)^\alpha=\bigotimes_{i\notin I(\alpha)}(\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}),$$

следовательно он ацикличен для всех α, если $I(\alpha)\ne\{0,\dots,n\}$. В последнем же случае, он имеет одномерную когомологию равную $\mathbb{C}z^\alpha$ в n-ом члене. Таким образом, получаем

$$\check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} \oplus_{\alpha\geq 0,\ |\alpha|=k}\mathbb{C}z^\alpha, & \text{при } p=0 \\ \oplus_{\alpha< 0,\ |\alpha|=k}\mathbb{C}z^\alpha, & \text{при } p=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $\alpha \geq 0$ означает, что $\forall i\ \alpha_i \geq 0$, $\alpha < 0$ означает, что $\forall i\ \alpha_i < 0$, а $|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. Осталось заметить, что полученные пространства легко отождествить с симметрическими степенями V и V^*. □

2.2. **Теоремы Картана.** Для всякого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ обозначим $E(k) = E\otimes\mathcal{O}(k)$. Расслоение $E(k)$ называется подкруткой расслоения E на k.

Определение. Будем говорить, что расслоение E на многообразии X порождается глобальными сечениями, если отображение вычисления $\Gamma(X,E)\otimes\mathcal{O}\to E$ сюрьективно. Иначе говря, если для любой точки $x\in X$ значения глобальных сечений расслоения E в точке x порождают слой расслоения E в точке x.

Теорема 2.3 (Теорема Картана А). *Для любого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ существует $k_0\in\mathbb{Z}$, такое что для любого $k\geq k_0$ расслоение $E(k)$ порождается глобальными сечениями.*

Доказательство: Приведем доказательство теоремы в предположении, что расслоение E тривиализовано в стандартном покрытии пространства $\mathbb{P}^n$. Допустим расслоение E задается в стандартном покрытии коциклом g_{ij}. Тогда согласно Упр. 1.9 (3) расслоение $E(k)$ задается коциклом $g_{ij}(z_j/z_i)^k$. Ясно, что достаточно проверить, что при больших k расслоение $E(k)$ порождается глобальными сечениями во всех точках открытого подмножества U_0.

Рассмотрим элементы коцикла $g_{i0} : U_i\cap U_0 \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Можно рассматривать g_{i0} как матрицу размера $r\times r$, коэффициенты которой являются алгебраическими функциями на $U_i\cap U_0$. Однако всякая алгебраическая функция на $U_i\cap U_0$ имеет вид $f(z)/(z_0z_i)^N$, где $f(z)$ — однородный многочлен степени $2N$. Значит можно записать $g_{i0}(z) = f_{i0}(z)/(z_0z_i)^N$, где $f_{i0}(z)$ — матрица размера $r\times r$, коэффициенты которой являются однородными многочленами степени $2N$. Тогда при $k\geq N$

$$g_{i0}(z)(z_0/z_i)^k = f_{i0}(z)z_0^{k-N}/z_i^{k+N}$$

следовательно для любого вектора $e\in\mathbb{C}^r$ имеем

$$(g_{i0}(z)(z_0/z_i)^k)e = (f_{i0}(z)z_0^{k-N}/z_i^{k+N})e.$$

Правая часть является регулярной функцией на U_i со значениями в $\mathbb{C}^r$. Это значит, что набор

$$s_0 = e, \qquad s_i = (f_{i0}(z)z_0^{k-N}/z_i^{k+N})e \quad (i=1,\dots,n)$$

задает глобальное сечение расслоения $E(k)$ на $\mathbb{P}^n$ (см. Упр. 1.11 (2)). Вектор e мы можем выбирать произвольно, поэтому построенный набор глобальных сечений очевидно порождает расслоение $E(k)$ над U_0. □

При доказательстве следующих теорем нам понадобится лемма.

Лемма 2.4. **(1)** *Если $\phi : E_1\to E_2$ — вложение расслоений, то существует расслоение E_3 и гомоморфизм $\psi : E_2\to E_3$, такой что последовательность $0\to E_1\to E_2\to E_3\to 0$ точна.*

(2) *Аналогично, если $\psi : E_2 \to E_3$ — сюрьекция расслоений, то существует расслоение E_1 и гомоморфизм $\phi : E_1 \to E_2$, такой что последовательность $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ точна.*

Доказательство: Пусть $r_1 = r(E_1)$, $r_2 = r(E_2)$ и $r_3 = r_2 - r_1$. Допустим расслоения E_1 и E_2 тривиализованы в некотором покрытии многообразия X. Покажем, что измельчая покрытие и меняя тривиализацию можно добиться того, чтобы на каждом элементе покрытия U_i морфизм ϕ задавался бы матрицей

$$\phi_i(z) = \begin{pmatrix} A_i(z) \\ B_i(z) \end{pmatrix},$$

где $A_i(z)$ — матрица размера $r_1 \times r_1$, причем $\det A_i(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке множества U_i, а $B_i(z)$ — матрица размера $r_3 \times r_1$. Действительно, поскольку ϕ — вложение расслоений, то ϕ локально задается матрицей имеющей во всех точках ранг r_1. Значит, в любой точке один из миноров размера $r_1 \times r_1$ этой матрицы отличен от нуля. Измельчая покрытие и меняя тривиализацию, можно добиться того, что это будет минор, образованный первыми r_1 строками матрицы. Но это как раз то, что нам и требуется.

Допустим, что мы выбрали такое покрытие и такие тривиализации. Пусть g_{ij} — коцикл, задающий расслоение E_2. Запишем его в блочном виде

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^{11} & , & g_{ij}^{12} \\ g_{ij}^{21} & , & g_{ij}^{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij}^{11} — матрица размера $r_1 \times r_1$, а g_{ij}^{22} — матрица размера $r_3 \times r_3$. Пусть

$$h_{ij} = -B_i A_i^{-1} g_{ij}^{12} + g_{ij}^{22}, \qquad\qquad \psi_i = \left(-B_i A_i^{-1} \ , \ E\right),$$

где E — единичная матрица размера $r_3 \times r_3$. Легко проверить, что тогда

$$h_{ij} h_{jk} = h_{ik}, \quad \psi_i = h_{ij} \psi_j g_{ij}^{-1}$$

и что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{r_1} \xrightarrow{\phi_i(z)} \mathbb{C}^{r_2} \xrightarrow{\psi_i(z)} \mathbb{C}^{r_3} \longrightarrow 0$$

точна в любой точке $z \in U_i$. Первое из равенств означает, что h_{ij} — коцикл. Пусть E_3 — соответствующее расслоение ранга r_3. Второе равенство означает, что ψ_i задают гомоморфизм $\psi : E_2 \to E_3$ (см. Упр. 1.11 (2)). Наконец точность последовательности означает точность последвательности расслоений. Тем самым доказан пункт (1). Пункт (2) доказывется аналогично. $\square$

Упражнение 2.5. Пусть $f : E \to F$ — гомоморфизм расслоений. Докажите, что если ранг морфизма $f_x : E_x \to F_x$ постоянен, то существуют точная последовательность

$$0 \to K \to E \xrightarrow{f} F \to C \to 0,$$

где K и C — расслоения рангов $r(E) - r(f)$ и $r(F) - r(f)$ соответственно.

Следующая теорема вместе с теоремой A полностью описывает когомологии больших положительных подкруток произвольного расслоения.

Теорема 2.6 (Теорема Картана B). *Для любого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое что для любых $k \geq k_0$ и $p > 0$ имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$.*

Доказательство: Докажем теорему убывающей индукцией по p. При $p > n$ все следует из теоремы 2.1 — это доставляет базу индукции. Допустим, что мы уже доказали, что для любого расслоения E найдется $k_p(E) \in \mathbb{Z}$, такое что $\mathrm{H}^{>p}(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ при $k \geq k_p(E)$.

Пусть $p \geq 1$. Рассмотрим произвольное расслоение E. По теореме A найдется $k' \in \mathbb{Z}$, такое что $E(k')$ порождается глобальными сечениями. Это означает, что существует сюрьекция $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E(k')) \otimes \mathcal{O} \to E(k')$. По лемме 2.4 эту сюрьекцию можно достроить до точной тройки расслоений

$$0 \to E' \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E(k')) \otimes \mathcal{O} \to E(k') \to 0. \qquad (*)$$

Положим $k_{p-1}(E) = k_p(E') + k'$. Тогда при $k \geq k_{p-1}(E)$ длинная точная последовательность когомологий, соответствующая этой последовательности расслоений, подкрученной на $k - k'$ имеет вид

$$\to \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E(k')) \otimes \mathcal{O}(k-k')) \to \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, E(k)) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n, E'(k-k')) \to$$

Из теоремы Ботта и из предположения индукции для расслоения E' теперь следует, что $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ при $i \geq p$ и $k \geq k_{p-1}(E)$, что и требовалось доказать. $\square$

Аналогично, можно описать поведение расслоения при больших отрицательных подкрутках.

Теорема 2.7 (Теорема Картана B$'$)**.** *Для любого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое что для любых $k \geq k_0$ и $p < n$ имеем* $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(-k)) = 0$.

Набросок доказательства: Доказательство теоремы B$'$ "двойственно" доказательству теоремы B. Во-первых, убывающая индукция заменятся возрастающей. Во-вторых, "дуализируется" основной шаг в доказательстве — точная последовательность $(*)$ заменяется на точную последовательность

$$0 \to E(-k') \to (\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E^*(k')))^* \otimes \mathcal{O} \to E' \to 0.$$

$\square$

Замечание. На самом деле, теорема B$'$ является следствием теоремы B и двойственности Серра, о которой мы поговорим позже.

2.3. **Теорема Гротендика.** В этом разделе мы дадим полное описание векторных расслоений на проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Теорема 2.8 (Теорема Гротендика)**.** *Пусть E — расслоение ранга r на $\mathbb{P}^1$. Тогда существует единственная неубывающая последовательность целых чисел $a_1 \geq \cdots \geq a_r$, так что*

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r).$$

Доказательство существования: Воспользуемся индукцией по r. При $r = 1$ нечего доказывать ввиду теоремы 1.8. Допустим $r > 1$. Из теорем Картана A и B$'$ следует, что существует $a \in \mathbb{Z}$, такое что

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(a)) \neq 0, \qquad \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(a-1)) = 0.$$

Пусть s — нетривиальное глобальное сечение расслоения $E(a)$. Тогда s задает морфизм расслоений $\mathcal{O} \to E(a)$. Докажем, что s является вложением расслоений. Допустим противное. Это означает, что сечение s обращается в нуль в некоторой точке прямой $\mathbb{P}^1$. Выберем однородные координаты $(z_0 : z_1)$ на $\mathbb{P}^1$, в которых эта точка равна $(0 : 1)$. Легко показать, что тогда s/z_0

является корректно определенным глобальным сечением расслоения $E(a-1)$, что противоречит выбору a.

Так как s — вложение расслоений то по лемме 2.4 существует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E(a) \to E' \to 0.$$

Здесь E' — расслоение ранга $r-1$. Значит по предположению индукции имеем $E' \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1})$, то есть получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E(a) \to \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}) \to 0. \tag{2.9}$$

Подкручивая ее на -1 и пользуясь теоремой Ботта получаем изоморфизм

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^1, E(a-1)) = \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_1 - 1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1} - 1)),$$

значит из выбора a и из теоремы Ботта следует, что $b_1, \dots, b_{r-1} \le 0$.

Докажем теперь, что последовательность (2.9) расщепляется. Для этого достаточно построить морфизм $f : E(a) \to \mathcal{O}$ такой что $f \cdot s = 1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Применяя к точной последовательности (2.9) функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O})$ получаем точную последовательность

$$\dots \to \mathrm{Hom}(E(a), \mathcal{O}) \xrightarrow{s} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}), \mathcal{O}) \to \dots$$

Поскольку $b_1, \dots, b_{r-1} \le 0$ то из Упр. 1.16 и из теоремы Ботта следует

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}), \mathcal{O}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(-b_{r-1})) = 0$$

Значит существует $f \in \mathrm{Hom}(E(a), \mathcal{O})$, такой что $s(f) = 1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Однако, $s(f) = f \cdot s$, следовательно последовательность (2.9) расщепляется, значит

$$E(a) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1})$$

и все доказано. □

Доказательство единственности: Допустим

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r) \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_r),$$

причем $a_1 \ge \dots \ge a_r$, $b_1 \ge \dots \ge b_r$. Пусть $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$. Пусть s такое число, что $a_1 = b_1, \dots, a_s = b_s$, но $a_{s+1} \ne b_{s+1}$. Пусть для определенности $a_{s+1} > b_{s+1}$. Тогда с одной стороны

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(-a_{s+1})) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(a_1 - a_{s+1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r - a_{s+1})) = \\ = \mathbf{S}^{a_1 - a_{s+1}} V^* \oplus \dots \oplus \mathbf{S}^{a_s - a_{s+1}} V^* \oplus \mathbb{C},$$

а с другой стороны

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(-a_{s+1})) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_1 - a_{s+1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_r - a_{s+1})) = \\ = \mathbf{S}^{b_1 - a_{s+1}} V^* \oplus \dots \oplus \mathbf{S}^{b_s - a_{s+1}} V^* = \mathbf{S}^{a_1 - a_{s+1}} V^* \oplus \dots \oplus \mathbf{S}^{a_s - a_{s+1}} V^*,$$

то есть мы пришли к противоречию. □

Определение. Векторное расслоение называется разложимым или расщепимым, если оно изоморфно прямой сумме расслоений меньшего ранга.

Теорему Гротендика можно переформулировать следующим образом: *всякое расслоение на* $\mathbb{P}^1$ *разложимо.* В дальнейшем мы увидим, что это уже не верно для других проективных пространств.

3. Когерентные пучки.

Как уже отмечалось, категория векторных расслоений не является абелевой. Это существенно снижает возможности применения методов гомологической алгебры (точных последовательностей когомологий и других производных функторов), что является ее большим недостатком. Чтобы устранить этот недостаток полезно вложить категорию расслоений в "хорошую" абелеву категорию. Кроме того, само определение производных функторов требует существования вложения в "хорошую" абелеву категорию. Такой категорией является категория когерентных пучков, которую мы сейчас и построим.

Чтобы получить определение когерентного пучка надо аксиоматизировать те свойства векторных расслоений, который мы хотим сохранить, а именно их когомологические свойства. Напомним, что согласно теореме 1.18 единственное, что нужно знать про расслоение E для вычисления его когомологий — это пространства $\Gamma(U, E)$ сечений этого расслоения над открытыми множествами $U \subset X$ и отображения ограничения $\Gamma(U, E) \to \Gamma(U', E)$ для всякого вложения $U' \subset U$. Следующее определение аксиоматизирует свойства этих пространств.

Определение. Локально свободным пучком $\mathcal{O}$-модулей на многообразии X называется набор векторных пространств $\mathcal{E}(U)$ для всякого открытого подмножества $U \subset X$ и отображений ограничения $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$ для всякого вложения $U' \subset U$, такой что

(0) Пространство $\mathcal{E}(U)$ является модулем над алгеброй $\Gamma(U, \mathcal{O})$ алгебраических функций на множестве U, отображение $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$ является гомоморфизмом $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модулей ($\mathcal{E}(U')$ снабжается структурой $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модуля с помощью отображения ограничения $\Gamma(U, \mathcal{O}) \to \Gamma(U', \mathcal{O})$), а композиция морфизмов ограничения $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U') \to \mathcal{E}(U'')$ совпадает с морфизмом ограничения $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U'')$.

(1) (Пучковость) Для любого покрытия $U = \bigcup_i U_i$ точна последовательность

$$0 \to \mathcal{E}(U) \to \oplus_i \mathcal{E}(U_i) \xrightarrow{d} \oplus_{i<j} \mathcal{E}(U_i \cap U_j) \tag{3.1}$$

(из предыдущего свойства следует, что последовательность (3.1) всегда является комплексом).

(1) (Локальная свободность) Любая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью $x \in U$, что

$$\mathcal{E}(U) \cong \Gamma(U, \mathcal{O})^{\oplus r}.$$

(2) (Квазикогерентность) Любая точка $x \in X$ обладает окрестностью $x \in U$, такой что для любого $U' \subset U$ имеем

$$\mathcal{E}(U') \cong \mathcal{E}(U) \otimes_{\Gamma(U,\mathcal{O})} \Gamma(U'\mathcal{O}),$$

и отображение ограничения совпадает с каноническим морфизмом

$$\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U) \otimes_{\Gamma(U,\mathcal{O})} \Gamma(U'\mathcal{O}), \qquad s \mapsto s \otimes 1.$$

Число r называется рангом локально свободного пучка $\mathcal{E}$ и обозначается $r(\mathcal{E})$.

Упражнение 3.2. **(1)** Докажите, что пространства $\mathcal{E}(U) = \Gamma(U, E)$ сечений расслоения E образуют локально свободный пучок ранга $r(\mathcal{E}) = r(E)$. **(2)** Докажите, что по всякому локально свободному пучку $\mathcal{E}$ ранга r можно построить расслоение E ранга r, такое что $\mathcal{E}(U) = \Gamma(U, E)$.

Тем самым понятие локально свободного пучка полностью эквивалентно понятию векторного расслоения.

Теперь легко получить расширение категории векторных расслоений. Это можно сделать несколькими способами. Например, отбрасывая условие локальной свободности, мы получаем определение квазикогерентного пучка $\mathcal{O}$-модулей на X. Заменяя условие локальной свободности на условие локальной конечной порожденности

(2′) Любая точка $x \in X$ обладает окрестностью $x \in U$, такой что $\mathcal{E}(U)$ — конечно порожденный $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модуль.

получаем определение когерентного пучка $\mathcal{O}$-модулей на X. Далее, отбрасывая условия (2) и (3) получаем определение пучка $\mathcal{O}$-модулей, а отбрасывая еще и условие (0) получаем определение пучка векторных пространств. Наконец, отбрасывая в определении (квази)когерентного пучка условие пучковости, получаем определение (квази)когерентного предпучка на X.

Замечание. Понятие предпучка можно переформулировать следующим образом. Пусть $\mathrm{Open}(X)$ — категория, объекты которой это открытые подмножества, а морфизмы — вложения открытых подмножеств. Тогда предпучок векторных пространств это просто контравариантный функтор из категории $\mathrm{Open}(X)$ в категорию векторных пространств. Аналогично можно определить предпучок групп, абелевых групп, колец, предпучок модулей над предпучком колец, и т.д. Добавляя свойство (1) можно получить определение пучка в любой из вышеперечисленных категорий.

Пример 3.3. **(1)** Пусть $x \in X$. Структурный пучок точки $\mathcal{O}_x$ определяется равенствами

$$\mathcal{O}_x(U) = \begin{cases} \mathbb{C}, & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

(2) Пусть $Z \subset X$ — подмногообразие. Структурный пучок подмногообразия $\mathcal{O}_Z$ определяется равенствами

$$\mathcal{O}_Z(U) = \begin{cases} \Gamma(U \cap Z, \mathcal{O}), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

(3) Пучок идеалов подмногообразия J_Z определяется равенствами

$$J_Z(U) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}) \mid f_{|Z \cap U} = 0\}.$$

(4) Постоянный предпучок $\mathbb{Z}'_X$ определяется равенством $\mathbb{Z}'_X(U) = \mathbb{Z}$.

(5) Постоянный пучок $\mathbb{Z}_X$ определяется равенством $\mathbb{Z}_X(U) = \mathbb{Z}^{\pi_0(U)}$, где $\pi_0(U)$ — множество компонент связности множества U.

Упражнение 3.4. **(1)** Покажите, что $\mathcal{O}_x$, $\mathcal{O}_Z$ и J_Z — когерентные пучки. **(2)** Проверьте, что $\mathbb{Z}_X$ является пучком абелевых групп, а $\mathbb{Z}'_X$ не является пучком.

Определение. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — пучки $\mathcal{O}$-модулей на X. Гомоморфизм $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — это набор гомоморфизмов $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модулей $f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$, коммутирующих с гомоморфизмами ограничения.

Упражнение 3.5. Проверьте, что если $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — пучки сечений расслоений E и F, то $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(E, F)$.

Обозначим через $\mathrm{Sh}(X)$ категорию пучков на X, через $\mathrm{QCoh}(X)$ — категорию квазикогерентных пучков на X, через $\mathrm{Coh}(X)$ категорию когерентных пучков на X, а через $\mathrm{Coh}^{\mathrm{lf}}(X)$ — категорию локально свободных когерентных пучков на X. Тогда у нас получается последовательность вложений подкатегорий

$$\mathrm{Coh}^{\mathrm{lf}}(X) \subset \mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{QCoh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X),$$

причем первые два вложения — полные. Согласно Упр. 3.5 категория векторных расслоений на X эквивалнетна категории $\mathrm{Coh}^{\mathrm{lf}}(X)$, то есть является полной подкатегорией в $\mathrm{Coh}(X)$. В дальнейшем мы не будем делать различия между векторными расслоениями и локально свободными когерентными пучками. В частности, пучок сечений расслоения E будет обозначаться той же буквой E.

Следующая теорема показывает, что из всякого предпучка можно канонически образом изготовить пучок. Эта процедура очень важна для построения коядер в категории пучков.

Теорема 3.6. *Для любого предпучка $\mathcal{E}$ существует пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ и гомоморфизм предпучков $\phi : \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$, такой что любой гомоморфизм $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — пучок, пропускается через ϕ. Более того, сопоставление $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ является функтором из категории предпучков в категорию пучков, а ϕ — морфизмом функторов.*

Доказательство: Грубо говоря, предпучок не является пучком, если в нем не хватает сечений. Соответственно, процедура пучковизации состоит в добавлении недостающих сечений: мы берем покрытие $U = \bigcup U_i$ и если комплекс (3.1) не является точной последовательностью, то мы заменяем $\mathcal{E}(U)$ на $\operatorname{Ker} d$. Эту операцию надо проделать много раз с разными покрытиями, пока наш предпучок не станет пучком.

Более точно, надо сделать так. Определим слой пучка $\mathcal{E}$ в точке x как $\mathcal{E}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{E}(U)$. Далее, положим

$$\widetilde{\mathcal{E}}(U) = \left\{ s : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{E}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in U\ \exists x \in U' \subset U \text{ и } s' \in \mathcal{E}(U'), \text{ так что} \\ \forall y \in U' \text{ имеем } s(y) = s'(y) \in \mathcal{E}_y \end{array} \right\}$$

Легко проверить, что $\widetilde{\mathcal{E}}$ искомый пучок. $\square$

Замечание. Важно не путать слой E_x расслоения в точке x и слой $\mathcal{E}_x$ его пучка сечений $\mathcal{E}$. Это разные вещи! Слой $\mathcal{E}_x$ пучка сечений — это множество ростков сечений расслоения E в точке x. На самом деле E_x и $\mathcal{E}_x$ связаны следующим образом. $\mathcal{E}_x$ — модуль над кольцом $\mathcal{O}_{X,x}$ ростков функций в точке x. Кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ — локальное, то есть имеет ровно один максимальный идеал $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Так вот, $E_x = \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$. Чтобы избежать путаницы, в дальнейшем векторное пространство $\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ будем называть геометрическим слоем пучка $\mathcal{E}$.

Функтор $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ называется функтором пучковизации, а пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ называется пучком, ассоциированным с предпучком $\mathcal{E}$.

Упражнение 3.7. **(1)** Проверьте, что $\widetilde{\mathcal{E}}_x = \mathcal{E}_x$ для любой точки $x \in X$. **(2)** Докажите, что если предпучок $\mathcal{E}$ когерентен, то пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ тоже когрентен. (Указание: Достаточно проверить, что если U — такое аффинное открытое множество, что $\forall U' \subset U$ имеем $\mathcal{E}(U') = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(U')$, то $\widetilde{\mathcal{E}}(U) = \mathcal{E}(U)$)

Теорема 3.8. *Категории* $\mathrm{Sh}(X)$, $\mathrm{QCoh}(X)$ *и* $\mathrm{Coh}(X)$ *— абелевы.*

Доказательство: Достаточно проверить, что категория $\mathrm{Sh}(X)$ — абелева и что подкатегории $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{QCoh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X)$ замкнуты относительно взятия ядер и коядер морфизмов.

Для проверки абелевости категории $\mathrm{Sh}(X)$ надо доказать существование ядер и коядер и проверить аксиомы абелевой категории. Пусть $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — морфизм пучков. Тогда легко показать, что $\mathcal{E}'(U) = \mathrm{Ker}(f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U))$ является пучком. Более того, очевидно, что он является ядром морфизма f в категории пучков. С коядром ситуация немного сложнее. В этом случае $\mathcal{F}'(U) = \mathrm{Coker}(f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U))$ уже не является пучком, а только предпучком. Однако легко видеть, что предпучок $\mathcal{F}'$ является коядром морфизма f в категории предпучков, поэтому из теоремы 3.6 следует, что ассоциированный с ним пучок $\widetilde{\mathcal{F}'}$ является коядром в категории пучков.

Ясно, что если f_U — морфизм $\mathcal{O}(U)$-модулей, то $\mathcal{E}'(U)$ и $\mathcal{F}'(U)$ являются $\mathcal{O}(U)$-модулями, причем если $\mathcal{E}(U)$ и $\mathcal{F}(U)$ конечно порождены, то $\mathcal{E}'(U)$ и $\mathcal{F}'(U)$ — тоже конечно порождены. Более того, вследствии точности функтора локализации в категории модулей предпучки $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{F}'$ — квазикогерентны. Значит подкатегории $\mathrm{Coh}(X)$ и $\mathrm{QCoh}(X)$ замкнуты относительно взятия ядер и коядер (надо еще воспользоваться Упр. 3.7).

Остается несложная проверка выполнения в $\mathrm{Sh}(X)$ аксиом абелевой категории, которую мы предоставим читателю. □

Упражнение 3.9. **(1)** Докажите следующий критерий точности: последовательность пучков

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f'} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}'' \longrightarrow \ldots$$

точна, если для любого сечения $s \in \mathcal{E}(U)$, такого что $f_U(s) = 0$ и для любой точки $x \in U$ найдется окрестность $x \in U' \subset U$ и сечение $s' \in \mathcal{E}'(U')$, так что $s_{|U'} = f'(s')$. Иначе говоря, всякое сечение пучка $\mathcal{E}$, переходящее в 0, локально поднимается до сечения пучка $\mathcal{E}'$. **(2)** Проверьте, что последовательность пучков точна тогда и только тогда, когда она точна послойно, то есть когда $\forall x \in X$ точна последовательность

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{E}'_x \xrightarrow{f'_x} \mathcal{E}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{E}''_x \longrightarrow \ldots$$

Упражнение 3.10. Пусть $f : E \to F$ — морфизм расслоений. Докажите, что **(1)** f — сюрьекция расслоений тогда и только тогда, когда f — сюрьекция пучков; **(2)** f — вложение пучков, тогда и только тогда, когда существует точка $x \in X$, такая что f — вложение в точке x.

Таким образом, точная последовательность расслоений дает точную последовательность пучков, обратное же, вообще говоря не верно.

Пример 3.11. **(1)** Пусть Z — замкнутое подмногообразие в X. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to J_Z \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0.$$

(2) Пусть $\xi \in V^*$ и H — гиперплоскость в $\mathbb{P}(V)$, заданная уравнением $\xi = 0$. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\xi} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0.$$

Тем самым $J_H \cong \mathcal{O}(-1)$.

(3) Пусть $L \subset \mathbb{P}(V)$ — проективное подпространство, а $W \subset V^*$ — пространство линейных функций, обращающихся в нуль на L. Пусть $\dim W = \operatorname{codim} L = d$. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \Lambda^d W \otimes \mathcal{O}(-d) \to \Lambda^{d-1} W \otimes \mathcal{O}(d-1) \to \cdots \to W \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_L \to 0,$$

где отображение $\Lambda^k W(-k) \to \Lambda^{k-1} W \otimes \mathcal{O}(1-k)$ индуцировано вложением

$$\Lambda^k W \subset \Lambda^{k-1} W \otimes W \subset \Lambda^{k-1} W \otimes V^* = \Lambda^{k-1} W \otimes \Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(1))$$

и морфизмом $\Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}(-k) \to \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(1-k)$.

Упражнение 3.12. Проверьте точность этих последовательностей.

Упражнение 3.13. Точные последовательности пунктов (2) и (3) имеют следующее важное обобшение. Пусть E — расслоение ранга r на многообразии X, $s \in \Gamma(X, E^*) = \operatorname{Hom}(E, \mathcal{O})$ и $Z = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$. Докажите, что если $\operatorname{codim} Z = r$, и сечение s трансверсально пересекает нулевое сечение вдоль Z, то возникает точная последовательность

$$0 \to \Lambda^r E \to \Lambda^{r-1} E \to \cdots \to E \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0, \tag{3.14}$$

где морфизм $\Lambda^k E \to \Lambda^{k-1} E$ — это композиция

$$\Lambda^k E \subset \Lambda^{k-1} E \otimes E \xrightarrow{1 \otimes s} \Lambda^{k-1} E.$$

Точная последовательность (3.14) называется комплексом Кошуля. Ее можно интерпретировать как локально свободную резольвенту структурного пучка $\mathcal{O}_Z$. Комплекс Кошуля очень удобен для вычислений и мы им будем неоднократно пользоваться.

Замечание. Легко видеть, что точные последовательности из 3.11 (2) и 3.11 (3) являются частным случаем комплекса Кошуля при $E = \mathcal{O}(-1)$ и $E = W \otimes \mathcal{O}(-1)$ соответственно.

Замечание. Если $\operatorname{codim} Z = r$, но сечение s пересекает нулевое сечение не трансверсально, то комплекс Кошуля является резольвентой пучка $\mathcal{O}/J_s$, где пучок идеалов $J_s \subset \mathcal{O}$ определяется как $J_s = \operatorname{Im}(E \xrightarrow{s} \mathcal{O})$. Иначе говоря, пусть $U \subset X$ — произвольное открытое множество, на котором расслоение E тривиально, то есть $E(U) \cong \mathcal{O}(U)^{\oplus r}$. Пусть $s = (f_1, \ldots, f_r)$ относительно выбранной тривиализации. Тогда $J_s(U) \subset \mathcal{O}(U)$ — идеал, порожденный функциями $f_1, \ldots, f_r$.

4. Неразложимое расслоения на $\mathbb{P}^2$.

Почти все операции и функторы, определенные для векторных расслоений можно перенести на когерентные пучки.

4.1. **Тензорные функторы.** Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — когерентные пучки на X. Тогда $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}')(U) = \mathcal{E}(U) \oplus \mathcal{E}(U')$ — когерентный пучок, называемый прямой суммой пучков $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$. Далее, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{E}'(U)$ и $\mathcal{F}'(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}(U))$ — когерентные предпучки. С их помощью легко определить тензорное произведение $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' = \widetilde{\mathcal{F}}$ и двойственный пучок $\mathcal{E}^* = \widetilde{\mathcal{F}}'$.

Упражнение 4.1. **(1)** Проверьте, что определения тензорных функторов на пучках и на расслоениях согласованны. **(2)** Пусть Y, Z — подмногообразия в X. Вычислите $\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_Z$ и $\mathcal{O}_Y \otimes J_Z$. **(3)** Докажите, что $(\mathcal{O}_Z)^* = 0$, $(J_Z)^* = \mathcal{O}$. Тем самым, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Z$ и $\mathcal{E} = J_Z$ — примеры пучков, таких что $\mathcal{E}^{**} \neq \mathcal{E}$.

Из Упр. 4.1 (3) видно, что когерентные пучки ведут себя по отношению к тензорным операциям не так как векторные пространства или векторные расслоения. Аналогом тут является поведение модулей над коммутативным кольцом.

Упражнение 4.2. **(1)** Покажите, что функтор $(\mathcal{E} \otimes -)$ на категории когерентных пучков точен справа, а функтор $(-)^*$ — слева. **(2)** Покажите, что функтор $(\mathcal{E} \otimes -)$ точен тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ — локально свободен.

4.2. **Когомологические функторы.** Как уже говорилось в разделе 1.5 при определенных условиях по точному слева функтору можно построить последовательность производных функторов, так что всякой короткой точной последовательности соответствует длинная точная последовательность производных функторов. Грубо говоря, производные функторы могут быть построены следующим образом. Обозначим функтор через F. Будем говорить, что объект A ацикличен для F, если для всякой точной последовательности вида $0 \to A \to B \to C \to 0$ последовательность $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ тоже точна. Возьмем теперь произвольный объект E. Предположим для E существует правая резольвента, составленная из ацикличных объектов, то есть точная последовательность вида

$$0 \to E \to A_0 \to A_1 \to A_2 \to \dots$$

в которой все объекты $A_0, A_1, A_2, \dots$ — ацикличны. Тогда определим $R^i F(E)$ как когомологию комплекса

$$0 \to F(A_0) \to F(A_1) \to F(A_2) \to \dots$$

в i-ом члене. Из точности слева функтора F тогда следует равенство $R^0 F(E) = F(E)$. Далее, пусть $0 \to E^1 \to E^2 \to E^3 \to 0$ — точная тройка. Предположим, что эту точную тройку можно достроить до точной тройки ацикличных резольвент $0 \to A^1_\bullet \to A^2_\bullet \to A^3_\bullet \to 0$. Тогда всилу ацикличности объектов A^k_i применение функтора F дает точную тройку комплексов $0 \to F(A^1_\bullet) \to F(A^2_\bullet) \to F(A^3_\bullet) \to 0$. Значит, по лемме о змее возникает длинная точная последовательность, составленная из когомологий этих комплексов, то есть из производных функторов $R^\bullet F(E^k)$. Конечно, это еще не все. Надо еще проверить, что определение производных функторов не зависит от выбора ацикличной резольвенты, проверить функториальность всех конструкций и т.д.

Таким образом, достаточными условиями для существования производных функторов является наличие “достаточно большого” количества ацикличных относительно этого функтора объектов. Давайте посмотрим, как все это можно применить к функторам на категории когерентных пучков.

Мы уже определили функтор глобальных сечений $\Gamma(X,\mathcal{E}) = \mathcal{E}(X)$ и функторы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, -)$ и $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{E})$.

Упражнение 4.3. **(1)** Проверьте, что функторы Γ и Hom на категории когерентных пучков точны слева и согласованы с аналогичными функторами на категории векторных расслоений. **(2)** Докажите для локально свободного пучка $\mathcal{E}$ изоморфизм функторов

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{F}), \qquad \mathrm{Hom}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E},\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{G}).$$

С функтором глобальных сечений $\Gamma(X, -)$ ситуация такая. В категории $\mathrm{Coh}(X)$ ацикличных объектов для построения производных функторов не достаточно. Однако в категории $\mathrm{Sh}(X)$ ацикличных объектов уже много, поэтому мы можем определить функторы когомологий $\mathrm{H}^i(X, -)$ в категории $\mathrm{Sh}(X)$, а затем ограничить их на подкатегорию $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X)$.

Для вычисления когомологий когерентных пучков можно использовать теорему 1.18. Доказательство этой теоремы для расслоений, приведенное в разделе 1.6 подходит и для когерентных пучков, так как теоремы 1.13 и 1.15 справедливы в категории $\mathrm{Coh}(X)$.

Следующее упражнение демонстрирует связь вычисления когомологий по Чеху с определением когомологий с помощью ацикличных резольвент.

Упражнение 4.4. Пусть $V \subset X$ — открытое подмножество, а E — квазикогерентный пучок на X. **(1)** Покажите, что равентсво $\underline{\mathcal{C}}_E^V(U) = E(U\cap V)$ задает квазикогерентный пучок на X, такой что $\Gamma(X,\underline{\mathcal{C}}_E^V) = \Gamma(V,E)$. **(2)** Пользуясь теоремой 1.15 проверьте, что если V — аффинное множество, то пучок E ацикличен. **(3)** Пусть $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$ — открытое покрытие. Проверьте точность последовательности

$$0 \to E \to \underline{\mathcal{C}}_E^0 \to \underline{\mathcal{C}}_E^1 \to \underline{\mathcal{C}}_E^2 \to \dots, \qquad \text{где } \underline{\mathcal{C}}_E^p = \bigoplus_{0\le i_0<\dots<i_p\le N} \underline{\mathcal{C}}_E^{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}},$$

а морфизмы задаются формулами из раздела 1.6. **(4)** Докажите изоморфизм комплексов $\Gamma(X,\underline{\mathcal{C}}_E^\bullet) = \mathcal{C}_E^\bullet$.

Теперь перейдем к функтору Hom. Из Упр. 4.3 (2) и 4.1 (3) следует, что для локально свободного пучка $\mathcal{E}$ функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, -)$ является композицией точного функтора $\mathcal{E}^*\otimes -$ и функтора $\Gamma(X, -)$. Отсюда легко следует существование правых производных функторов $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, -)$ и изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(X,\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{F}) \qquad (\text{для локально свободного пучка } \mathcal{E}).$$

Если же $\mathcal{E}$ не является локально свободным, то для вычисления $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$ можно воспользоваться *локально свободной резольвентой* $\mathcal{E}_\bullet \to \mathcal{E}$, то есть точной последовательностью

$$\dots \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E} \to 0$$

в которой все $\mathcal{E}_i$ локально свободны. Позднее мы докажем, что всякий когерентный пучок обладает локально свободной резольвентой, поэтому вычисление функторов $\mathrm{Ext}^\bullet$ всегда можно свести к вычислению когомологий.

4.3. **Когомологии когерентных пучков.** Исследуем теперь насколько теоремы, доказанные нами для векторных расслоений на проективном пространстве справедливы для когерентных пучков.

Теорема 2.1 справедлива. Доказывается она тем же способом, что и в разделе 2.1.

Теорема Картана A тоже справедлива. Доказательство ее основано на двух фактах. Во-первых, всякий когерентный пучок на аффинном многообразии порождается глобальными сечениями, а во-вторых, всякое сечение $s \in \Gamma(U_i, E)$, где E — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$, а U_i — одно из стандартных открытых подмножеств, продолжается до сечения $\hat{s} \in \Gamma(\mathbb{P}^n, E(k))$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема Картана B следует из теоремы A и из теоремы Ботта, поэтому она справедлива для когерентных пучков.

Что же касается теоремы B$'$, то она уже не верна. Доказательство, приведенное в разделе 2.2 не проходит по причине неточности функтора $(-)^*$. Более того, легко показать, что структурный пучок точки $\mathcal{O}_x$ является контрпримером к теореме B$'$.

Упражнение 4.5. Пусть $x \in \mathbb{P}^n$. **(1)** Проверьте, что $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}_x$ для любого n. **(2)** Докажите, что если $x \in X$, то

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_x) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(Указание: воспользуйтесь точной последовательностью 3.11 (3) и теоремой Ботта.)

4.4. **Расширения пучков.**

Определение. Расширением пучка $\mathcal{E}$ с помощью пучка $\mathcal{E}'$ называется точная последовательность вида

$$0 \to \mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{E} \to 0. \tag{4.6}$$

Расширения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, индуцирующий тождественные изоморфизмы $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$.

Применяя к точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{E}')$ мы получаем длинную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}') \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \mathcal{E}') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \to \dots$$

Сопоставим всякому расширению $\mathcal{F}$ образ $\varepsilon(\mathcal{F})$ элемента $\mathrm{id}_{\mathcal{E}'}$ в пространстве $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Теорема 4.7. *Отображение $\mathcal{F} \mapsto \varepsilon(\mathcal{F})$ задает биекцию множества классов изоморфизма расширений пучка $\mathcal{E}$ с помощью пучка $\mathcal{E}'$ с пространством $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.*

Основным моментом в доказательстве является следующее свойство. Пусть $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ — морфизм когерентных пучков и $\mathcal{F}' = \mathrm{Coker}(\mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha \oplus f} \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}'')$. Обозначим через α' композицию $\mathcal{E}'' \xrightarrow{0 \oplus 1} \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}'' \to \mathcal{F}'$, а через $\beta' : \mathcal{F}' \to \mathcal{E}$ морфизм, индуцированный морфизмом $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}'' \xrightarrow{\beta \oplus 0} \mathcal{E}$.

Упражнение 4.8. **(1)** Последовательность

$$0 \to \mathcal{E}'' \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{F}' \xrightarrow{\beta'} \mathcal{E} \to 0$$

точна. **(2)** Применяя к этой точной последовательности функтор $\operatorname{Hom}(-, \mathcal{E}'')$ мы получим длинную точную последовательность, в которую входит морфизм $\operatorname{Hom}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'') \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}'')$. Проверьте, что при этом морфизме f переходит в $\varepsilon(\mathcal{F}')$.

Доказательство теоремы: Нам надо по элементу $\varepsilon \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ построить расширение $\mathcal{F}$, такое что $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{F})$. Воспользуемся теоремами Картана A и B. Выберем $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы пучок $\mathcal{E}(n)$ порождался глобальными сечениями, и чтобы $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{E}'(n)) = 0$. Пусть $\mathcal{E}'' = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \to \mathcal{E})$. Применяя к точной последовательности

$$0 \to \mathcal{E}'' \to \Gamma(X, \mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \to \mathcal{E} \to 0$$

функтор $\operatorname{Hom}(-, \mathcal{E}')$ получаем точную последовательность

$$\dots \to \operatorname{Hom}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \to \operatorname{Ext}^1(\Gamma(X, \mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n), \mathcal{E}') \to \dots$$

Заметим, что

$$\operatorname{Ext}^1(\Gamma(X, \mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n), \mathcal{E}') \cong \Gamma(X, \mathcal{E}(n))^* \otimes \mathrm{H}^1(X, \mathcal{E}'(n)) = 0,$$

значит найдется $f \in \operatorname{Hom}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$, который переходит в ε. Теперь применяя Упр. 4.8 получаем искомое расширение. $\square$

4.5. **Пример неразложимых расслоений на $\mathbb{P}^2$.** Теперь, наконец, мы можем приступить к построению примера неразложимого расслоения на $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2$.

Возьмем набор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ попарно различных точек в $\mathbb{P}^2$. Пусть $J_{\bar{x}}$ пучок идеалов подмногообразия $\bar{x}$ (см. 3.3 (3)). Будем искать расслоение E в виде расширения

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_{\bar{x}} \to 0. \tag{4.9}$$

Согласно теореме 4.7 они описываются пространством $\operatorname{Ext}^1(J_{\bar{x}}, \mathcal{O})$. Вычислим его. Для этого используем точные последовательности

$$0 \to J_{\bar{x}} \to \mathcal{O} \to \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i} \to 0, \tag{4.10}$$

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{(\eta_i, -\xi_i)} \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{(\xi_i, \eta_i)} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{x_i} \to 0, \tag{4.11}$$

где $\xi_i, \eta_i \in V^*$ — уравнения точки x_i. Применяя к (4.11) функтор $\operatorname{Hom}(-, \mathcal{O})$ и пользуясь теоремой Ботта получаем комплекс

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{(\xi_i, \eta_i)} V^* \oplus V^* \xrightarrow{(\eta_i, -\xi_i)} \mathbf{S}^2 V^* \to 0,$$

вычисляющий функторы $\operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_{x_i}, \mathcal{O})$. Отсюда получаем

$$\operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_{x_i}, \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Следовательно

$$\operatorname{Ext}^p(\oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i}, \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C}^m, & \text{при } p = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь, применяем функтор $\mathrm{Hom}(\,-\,,\mathcal{O})$ к (4.10). Получаем

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to 0 \to 0 \to \mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to \mathbb{C}^m \to 0 \to \mathrm{Ext}^2(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to 0.$$

Отсюда

$$\mathrm{Ext}^p(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p=0 \\ \mathbb{C}^m, & \text{при } p=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = (1,1,\dots,1) \in \mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) = \oplus_{i=1}^m \mathbb{C}$.

Теорема 4.12. *Пусть E расширение пучка $J_{\bar{x}}$ с помощью $\mathcal{O}$, соответствующее ε. Тогда E — неразложимое векторное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$.*

Доказательство неразложимости: Чтобы проверить неразложимость E вычислим его когомологии. Применяя к (4.10) функтор $\Gamma(\mathbb{P}^2,-)$ и пользуясь теоремой Ботта и Упр. 4.5 (2) получаем

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^2,J_{\bar{x}}) = \begin{cases} \mathbb{C}^{m-1}, & \text{при } p=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Следовательно, из определения E получаем

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^2,E) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p=0 \\ \mathbb{C}^{m-1}, & \text{при } p=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Однако, по теореме Ботта у всякого разложимого расслоения на $\mathbb{P}^2$ первые когомологии зануляются, следовательно E неразложимо. $\square$

Остается доказать, что пучок E локально свободен. Это будет сделано в следующий раз с использованием функторов $\mathcal{E}xt$.

5. Тип расщепления расслоений на $\mathbb{P}^n$.

5.1. **Функторы $\mathcal{E}xt$.** Напомним, что мы определили функтор $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^*$ равенством $\Gamma(U, \mathcal{E}^*) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}(U))$. Легко обобщить это определение, заменив в последнем равенстве $\mathcal{O}$ произвольным пучком. Мы получим определение пучка локальных гомоморфизмов: пучок $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{F}(U))$. (по модулю пучковизации, то есть равенство выполнено только для маленьких открытых множеств). Таким образом, функтор $\mathcal{H}om$ локально устроен как функтор Hom в категории модулей над кольцом. Следовательно, он точен слева и имеет правые производные функторы, которые обозначаются $\mathcal{E}xt^p$ и с точностью до пучковизации задаются равенствами

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) = \mathrm{Ext}(\mathcal{E}(U), \mathcal{F}(U)).$$

Отсюда легко выводится

Упражнение 5.1. Пусть $\mathcal{E}$ локально свободен. **(1)** Покажите, что для любого пучка $\mathcal{F}$ имеем $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}$ и $\mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$. **(2)** Проверьте, что для любых пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеем $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^p(\mathcal{F}, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{G})$.

Функторы Hom и $\mathcal{H}om$ по определению связаны соотношением

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})).$$

К сожалению, оба функтора Γ и $\mathcal{H}om$ не точны, поэтому связь между функторами $\mathrm{Ext}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и $\mathcal{E}xt(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ вообще говоря не тривиальна. Однако, есть несколько исключений.

Упражнение 5.2. (1) Покажите, что если $\mathcal{E}$ локально свободен, то для любого $\mathcal{F}$ имеем $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^p(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}))$. **(2)** Покажите, что любых пучков $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое что при $k \geq k_0$ имеем

$$\mathrm{Ext}^p(\mathcal{E}, \mathcal{F}(k)) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^p(\mathcal{E}, \mathcal{F})(k)).$$

В общем же случае связь функторов дается некторой спектральной последовательностью.

Упражнение 5.3. Постройте точную последовательность

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{F})) \to \mathrm{H}^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})).$$

Важным примером использования функторов $\mathcal{E}xt$ является теорема.

Теорема 5.4. *Пучок $\mathcal{E}$ локально свободен $\iff \mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{E}, \mathcal{O}) = 0$.*

Доказательство: Необходимость условия очевидна (см. Упр. 5.1). Докажем достаточность. Допустим $\mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{E}, \mathcal{O}) = 0$. Это значит, что каждая точка $x \in X$ имеет окрестность $x \in U$, такую что $\mathcal{E}(U)$ является проективным модулем над $\mathcal{O}(U)$. Значит $\mathcal{E}(U)$ является прямым слагаемы в свободном модуле:

$$\mathcal{O}(U)^{\oplus n} \cong \mathcal{E}(U) \oplus M.$$

Пусть $p : \mathcal{O}(U)^{\oplus n} \to \mathcal{O}(U)^{\oplus n}$ — проектор на $\mathcal{E}(U)$. Гомоморфизм p задается матрицей размера $n \times n$ и ранга r. Рассмотрим все возможные миноры m_{IJ} размера $r \times r$ этой матрицы. Легко показать, что при ограничении на открытое подмножество $U_{IJ} = U \setminus \{m_{IJ} = 0\}$ проектор p индуцирует изоморфизм $\oplus_{j \in J} \mathcal{O}(U_{IJ}) \to \mathcal{E}(U_{IJ})$. Но множества U_{IJ} покрывают все U, слеовательно пучок $\mathcal{E}$ локально свободен на U. Значит он локально свободен и на всем X. $\square$

Применим теорему 5.4 для доказательства локальной свободности пучка E, построенного в разделе 4.5. Нам надо вычислить $\mathcal{E}xt^p(E,\mathcal{O})$. Применяя функтор $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O})$ к точной последовательности (4.11) получаем комплекс

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{(\xi_i,\eta_i)} \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \xrightarrow{(\eta_i,-\xi_i)} \mathcal{O}(2) \to 0$$

вычисляющий функторы $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O})$. Этот комплекс изоморфен комплексу (4.11), подкрученному на $\mathcal{O}(2)$, поэтому

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{x_i}(2) \cong \mathcal{O}_{x_i}, & \text{при } p=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(мы воспользовались Упр. 4.5). Далее, применяя функтор $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O})$ к точной последовательности (4.10) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{H}om(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to 0 \to 0 \to \mathcal{E}xt^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{x_i} \to 0 \to \mathcal{E}xt^2(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to 0.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}xt^p(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}, & \text{при } p=0 \\ \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i}, & \text{при } p=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Применяя $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O})$ к последовательности (4.9) получаем

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{H}om(E,\mathcal{O}) \to \mathcal{O} \xrightarrow{\varepsilon'} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{x_i} \to \mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O}) \to 0 \to 0 \to \mathcal{E}xt^2(E,\mathcal{O}) \to 0.$$

Значит, достаточно проверить, что морфизм ε' сюрьективен.

Поскольку в нашем случае $\mathrm{H}^{>0}(\mathbb{P}^2, \mathrm{Hom}(J_{\bar{x}},\mathcal{O})) = 0$, то точная последовательность из Упр. 5.3 дает изоморфизм $\mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{E}xt^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}))$. Легко видеть, что морфизм ε' соответствует глобальному сечению пучка $\oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{E}xt^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O})$, задаваемому элементом $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O})$. Значит $\varepsilon' = (1,1,\dots,1,1)$, следоватльно ε' сюрьективен.

5.2. **Функтор обратного образа.** Пусть $f : Y \to X$ морфизм алгебраических многообразий, а (E,π) — векторное расслоение на X. Определим векторное расслоение (f^*E, π_{f^*E}) на Y следующим способом

$$f^*E = E \times_X Y = \{(e,y) \in E \times Y \mid \pi_E(e) = f(y)\}, \qquad \pi_{f^*E}(e,y) = y.$$

Упражнение 5.5. **(1)** Покажите, что f^* — функтор. **(2)** Проверьте, что если расслоение E задается в покрытии U_i коциклом $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, то f^*E задается в покрытии $f^{-1}(U_i)$ коциклом $g_{ij} \cdot f : f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. **(3)** Проверьте, что $f^*(E \oplus F) \cong f^*E \oplus f^*F$, $f^*(E \otimes F) \cong f^*E \otimes f^*F$, $f^*(E^*) \cong (f^*E)^*$. **(4)** Докажите, что $f^*\mathcal{O} \cong \mathcal{O}$. **(5)** Пусть $i : \mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ — линейное вложение проективных пространств. Покажите, что $i^*\mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}(k)$.

Чтобы продолжить функтор f^* до функтора $f^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(Y)$ надо вычислить $\Gamma(U, f^*E)$. Допустим, что $f(U) \subset U' \subset X$ и расслоение E тривиализуется на U'. Пусть $e_1,\dots,e_r$ — базис сечений E на U'. Тогда легко видеть, что $f^*e_1,\dots,f^*e_r$ — базис сечений расслоения f^*E на U. Значит

$$\Gamma(U, f^*E) \cong \mathcal{O}(U)^{\oplus^r} \cong \mathcal{O}(U')^{\oplus r} \otimes_{\mathcal{O}(U')} \mathcal{O}(U) \cong \Gamma(U', E) \otimes_{\mathcal{O}(U')} \mathcal{O}(U),$$

где структура $\mathcal{O}(U')$-модуля на $\mathcal{O}(U)$ задается гомоморфизмом $\phi \in \mathcal{O}(U') \mapsto \phi \cdot f \in \mathcal{O}(U)$.

Значит, естественно определить функтор f^* на пучках следующим образом. Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X)$. Рассмотрим Пусть $U \subset Y$ — открытое подмножество, так что $f(U) \subset U' \subset X$ и U' аффинно. Положим

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U')} \mathcal{O}(U)$$

и определим пучок $f^*\mathcal{E}$ как пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{F}$.

Упражнение 5.6. **(1)** Покажите, что из когерентности пучка $\mathcal{E}$ следует корректность определения предпучка $\mathcal{F}$ и когерентность пучка $f^*\mathcal{E}$. **(2)** Проверьте, что f^* функтор. **(3)** Проверьте, что если $\mathcal{E}$ — локально свободен, то и $f^*\mathcal{E}$ — локально свободен. **(4)** Докажите, что $f^*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}') \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$, $f^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') \cong f^*\mathcal{E} \otimes f^*\mathcal{E}'$. **(5)** Покажите, что если $g : Z \to Y$, то имеем изоморфизм функторов $(fg)^* = g^* f^*$.

Легко привести пример, когда $(f^*\mathcal{E})^* \not\cong f^*(\mathcal{E}^*)$. А именно, если $Y = x \in X$ и $\mathcal{E} = \mathcal{O}_x$, то легко показать, что $(f^*\mathcal{O}_x)^* \cong \mathcal{O}$, в то время как $f^*(\mathcal{O}_x^*) = 0$.

Если Y — замкнутое подмногообразие в X, то морфизм $i : Y \to X$ называется замкнутым вложением. Для замкнутого вложения пучок $i^*\mathcal{E}$ обозначается также через $\mathcal{E}_{|Y}$ и называется ограничением пучка $\mathcal{E}$ на подмногообразие Y.

5.3. **Производные функторы.** Из определения следует, что функтор f^* локально устроен как функтор тензорного умножения над кольцом. Поэтому он точен справа и имеет левые производные функторы $L^p f^*$, которые с точностью до пучковизации задаются равенствами

$$(L^p f^*\mathcal{E})(U) = \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{O}(U')}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}(U')), \quad f(U) \subset U', \quad U' \text{ —аффинно.}$$

Упражнение 5.7. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок. **(1)** Проверьте, что $L^{>0} f^*\mathcal{E} = 0$. **(2)** Докажите, что для любого пучка $\mathcal{F}$ имеется изоморфизм функторов $L^p f^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \cong f^*\mathcal{E} \otimes L^p f^*\mathcal{F}$.

5.4. **Тип расщепления векторных расслоений.** Прямой L в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ называется линейное вложение $L \cong \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$. Ясно, что множество всех прямых в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ это грассманиан $\mathrm{Gr}(2; V)$. Обозначим его для краткости через $\mathbb{G}_n$.

Пусть E расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n$. Для всякой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ рассмотрим ограничение $E_{|L}$. По теореме Гротендика имеем

$$E_{|L} \cong \mathcal{O}_L(a_1^E(L)) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_L(a_r^E(L)),$$

причем набор целых чисел $a_1^E(L) \geq \cdots \geq a_r^E(L)$ однозначно определен. Набор $a^E(L) = (a_1^E(L), \ldots, a_r^E(L))$ называется типом расщепления расслоения E на прямой L. Тип расщепления иногда удобно рассматривать как отображение

$$a^E : \mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}^r.$$

Введем на $\mathbb{Z}^r$ лексикографический порядок, то есть $(a_1, \ldots, a_r) > (b_1, \ldots, b_r)$, если для некоторого $1 \leq s \leq r$ имеем

$$a_1 = b_1, \quad \ldots \quad, a_{s-1} = b_{s-1} \quad \text{и} \quad a_s > b_s.$$

В дальнейшем мы докажем важную теорему.

Теорема 5.8. **(1)** *Для всякого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ множество $\{a^E(L)\}_{L \in \mathbb{G}_n}$ ограничено снизу.*
(2) *Для любого $a \in \mathbb{Z}^r$ множество $\{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E(L) > a\} \subset \mathbb{G}_n$ — замкнуто.*

Обозначим через $\underline{a}^E$ минимум $a^E(L)$ по всем прямым $L \in \mathbb{G}_n$. Из теоремы 5.8 следует, что множество $U_E = \{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E(L) = \underline{a}^E\}$ открыто. Поэтому $\underline{a}^E$ называется **общим типом расщепления** расслоения E. Всякая прямая $L \in S_E := \mathbb{G}_n \setminus U_E$ называется **прямой подскока** расслоения E.

Пример 5.9. Если $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r)$ — полностью расщепимое расслоение, то очевидно для любой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ имеем $a^E(L) = a$. Значит $\underline{a}^E = a$, $U_E = \mathbb{G}_n$ и $S_E = \emptyset$.

Рассмотрим теперь расслоение E, построенное в разделе 4.5. Вычислим $a^E(L)$ для всякой прямой $L \in \mathbb{G}_2$. Пусть $i : L \to \mathbb{P}^2$ — вложение. Начнем с вычисления $L^p i^* \mathcal{O}_{x_i}$. Применим для этого функтор i^* к резольвенте (4.11) из раздела 4.5. Мы получим комплекс

$$0 \to \mathcal{O}_L(-2) \xrightarrow{(\eta_i, -\xi_i)} \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-1) \xrightarrow{(\xi_i, \eta_i)} \mathcal{O}_L \to 0,$$

когомологии которого равны $L^p i^* \mathcal{O}_{x_i}$. Легко показать, что если точка x_i не лежит на прямой L, то ξ_i и η_i не имеют общих нулей на прямой L и вышеуказанный комплекс точен, следовательно $L^p i^* \mathcal{O}_{x_i} = 0$. Если же точка x_i лежит на прямой L, то можно считать, что $\xi_{i|L} = 0$ и легко видеть, что $L^0 i^* \mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}_{x_i}$, $L^1 i^* \mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}_{x_i}(-1) \cong \mathcal{O}_{x_i}$ и $L^{>1} i^* \mathcal{O}_{x_i} = 0$. Допустим на прямой L лежит k точек из точек $x_1, \dots, x_m$. Допустим это точки $x_1, \dots, x_k$. Применяя функтор i^* к точной последовательности (4.10) получаем точную последовательность

$$\dots \to 0 \to \oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i} \to i^* J_{\bar{x}} \to \mathcal{O}_L \to \oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i} \to 0$$

откуда легко следует

$$L^p i^* J_{\bar{x}} = \begin{cases} (\oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i}) \oplus \mathcal{O}_L(-k), & \text{при } p = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Применяя теперь функтор i^* к точной последовательности (4.9) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_L \to E_{|L} \to (\oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i}) \oplus \mathcal{O}_L(-k) \to 0.$$

По теореме Гротендика имеем $E_{|L} = \mathcal{O}_L(a) \oplus \mathcal{O}_L(b)$, $a \geq b$. Из теоремы Ботта легко следует, что $a \geq 0$, $b \leq -k$, следовательно эта точная последовательность распадается на две точные последовательности

$$0 \to \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_L(a) \to \oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i} \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to 0 \to \mathcal{O}_L(b) \to \mathcal{O}_L(-k) \to 0,$$

откуда легко следует, что $a = k$, $b = -k$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 5.10. *Пусть E — расслоение, построенное в разделе 4.5. Тогда $a^E(L) = (k, -k)$, где $k = \#(\{x_1, \dots, x_m\} \cap L)$. В частности имеем $\underline{a}^E = (0, 0)$ и $U_E = \{L \in \mathbb{G}_2 \mid \{x_1, \dots, x_m\} \cap L = \emptyset\}$.*

Наш последний пример — касательное расслоение T к $\mathbb{P}^n$. Легко показать, что $T = \mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1), V \otimes \mathcal{O}/\mathcal{O}(-1)) \cong V \otimes \mathcal{O}(1)/\mathcal{O}$. Следовательно, имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\xi} V \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow T \to 0,$$

где $\xi = \mathrm{id}_V \in V \otimes V^* = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), V \otimes \mathcal{O}(1))$. Эта последовательность называется **последовательностью Эйлера**.

Теорема 5.11. *Для любой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ имеем $a^T(L) = (2, 1, \dots, 1)$.*

Доказательство: Ограничим последовательность Эйлера на прямую L. Все пучки в этой последовательности локально свободны, поэтому по Упр. 5.7 (1) мы получим точную последовательность расслоений на L

$$0 \to \mathcal{O}_L \to V \otimes \mathcal{O}_L(1) \to T_{|L} \to 0.$$

По теореме Гротендика имеем $T_{|L} = \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \dots \mathcal{O}_L(a_r)$. Высчисляя двумя способами $\dim \mathrm{H}^0(L, T_{|L})$ получаем $\sum_{i=1}^n a_i = n+1$. С другой стороны, из теоремы Ботта следует, что $\forall i\ a_i \geq 1$, следовательно $a^T(L) = (2, 1, \dots, 1)$. $\square$

Упражнение 5.12. **(1)** Докажите, что при $n > 1$ имеем $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}^n, T(-2)) = 0$. **(2)** Докажите, что T не является полностью расщепимым.

Определение. Расслоение E на $\mathbb{P}^n$ называется равномерным, если отображение $a^E : \mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}^r$ — постоянно.

Согласно 5.9 всякое полностью расщепимое расслоение равномерно. Заметим также, что расслоение E из раздела 4.5 является примером неравномерного расслоения.

5.5. **Однородные расслоения.** Заметим, что на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ действует группа $\mathrm{GL}(V)$. Всякий ее элемент $g \in \mathrm{GL}(V)$ задает автоморфизм $g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.

Определение. Однородное (или эквивариантное) расслоение на $\mathbb{P}(V)$ — это расслоение E плюс изоморфизм $\phi_g : g^*E \to E$ для каждого $g \in \mathrm{GL}(V)$, так что для любых $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(V)$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} g_1^* g_2^* E & \xrightarrow{g_1^*\phi_{g_2}} & g_1^* E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1}} \\ (g_2 g_1)^* E & \xrightarrow{\phi_{g_2 g_1}} & E \end{array}$$

Упражнение 5.13. **(1)** Покажите, что расслоения $\mathcal{O}(k)$ и T на $\mathbb{P}^n$ однородны. **(2)** Покажите, что всякий эквивариантный когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$ локально свободен. **(3)** Проверьте, что категория однородных расслоений (определите в ней морфизмы!) замкнута относительно операций $\oplus$, $\otimes$, *, а также относительно взятия ядер и коядер.

Обозначим через G_x стабилизатор точки $x \in \mathbb{P}^n$ в группе $\mathrm{GL}(V)$.

Упражнение 5.14. Докажите, что категория однородных расслоений на $\mathbb{P}^n$ эквивалентна категории представлений группы G_x.

Теорема 5.15. *Всякое однородное расслоение равномерно.*

Доказательство: Это легко следует из того, что группа $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на грассманиане $\mathbb{G}_n$. $\square$

Суммируя вышесказанное мы имеем следующие включения

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Полностью} \\ \text{расщепимые} \\ \text{расслоения} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{Однородные} \\ \text{расслоения} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{Равномерные} \\ \text{расслоения} \end{array} \right\}$$

причем теорема 5.11 показывает, что первое включение строгое. Позднее мы приведем пример равномерного неоднородного расслоения, и тем самым продемонстрируем, что второе включение тоже строгое.

6. Критерий Хоррокса.

Сегодня мы докажем критерий расщепимости расслоения на $\mathbb{P}^n$.

6.1. **Детерминант и степень.** Пусть E — векторное расслоение. В разделе 1.4 мы определили операцию тензорного произведения на расслоениях. Ясно, что на тензорной степени $E^{\otimes p}$ действует симметрическая группа перестановками сомножителей. Обозначим подрасслоения инвариантных и антиинвариантных сечений в расслоении $E^{\otimes p}$ через $\mathbf{S}^p E$ и $\Lambda^p E$ соответственно. Расслоения $\mathbf{S}^p E$ и $\Lambda^p E$ называются симметрической и внешней степенью расслоения E.

Упражнение 6.1. **(1)** Покажите, что $r(\mathbf{S}^p E) = \binom{r(E)+p-1}{p}$, $r(\Lambda^p E) = \binom{r(E)}{p}$. **(2)** Найдите коциклы, задающие расслоения $\mathbf{S}^p E$ и $\Lambda^p E$. **(3)** Докажите, что $\mathbf{S}^p(E^*) = (\mathbf{S}^p E)^*$, $\Lambda^p(E^*) = (\Lambda^p E)^*$. **(4)** Покажите, что

$$\mathbf{S}^p(E_1 \oplus E_2) = \oplus_{i+j=p} \mathbf{S}^i E_1 \otimes \mathbf{S}^j E_2, \qquad \Lambda^p(E_1 \oplus E_2) = \oplus_{i+j=p} \Lambda^i E_1 \otimes \Lambda^j E_2.$$

(5) Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность расслоений. Докажите, что расслоение $F_p = \mathbf{S}^p E$ (соотв. $F_p = \Lambda^p E$) обладает фильтрацией $0 \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{p-1} \subset F_p$, такой что

$$F_j / F_{j-1} \cong \mathbf{S}^{p-j} E_1 \otimes \mathbf{S}^j E_2 \qquad (\text{соотв. } F_j / F_{j-1} \cong \Lambda^{p-j} E_1 \otimes \Lambda^j E_2).$$

(6) Покажите, что

$$\mathbf{S}^2(E \otimes F) = (\mathbf{S}^2 E \otimes \mathbf{S}^2 F) \oplus (\Lambda^2 E \otimes \Lambda^2 F), \quad \Lambda^2(E \otimes F) = (\mathbf{S}^2 E \otimes \Lambda^2 F) \oplus (\Lambda^2 E \otimes \mathbf{S}^2 F).$$

Если $r(E) = r$, то расслоение $\Lambda^r E$ (старшая внешняя степень) называется детерминантом расслоения E и обозначается через $\det E$. Согласно предыдущему упражнению $\det E$ — линейное расслоение, задаваемое коциклом $\det g_{ij}$.

Упражнение 6.2. **(1)** Докажите, что $\det(E^*) = (\det E)^*$. **(2)** Докажите, что $\det(E^*) \otimes \Lambda^p E = \Lambda^{r-p} E^*$. **(3)** Покажите, что $\det(E_1 \oplus E_2) = \det E_1 \otimes \det E_2$. **(4)** Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность расслоений. Докажите, что $\det E = \det E_1 \otimes \det E_2$. **(5)** Покажите, что $\det(E \otimes F) = (\det E)^{\otimes r(F)} \otimes (\det F)^{\otimes r(E)}$. **(6)** Покажите, что $\det(E(k)) = (\det E)(k \cdot r(E))$. **(7)** Пусть $f : E \to F$ — морфизм расслоений одинакового ранга. Докажите, что f — изоморфизм, тогда и только тогда, когда $\det f : \det E \to \det F$ — изоморфизм.

Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^n$. Поскольку всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ имеет вид $\mathcal{O}(k)$, то существует целое число d, такое что $\det E \cong \mathcal{O}(d)$. Число d называется степенью расслоения E и обозначается $\deg(E)$.

Упражнение 6.3. **(1)** Докажите, что $\deg(E^*) = -\deg(E)$. **(2)** Покажите, что $\deg(E_1 \oplus E_2) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$. **(3)** Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность расслоений. Докажите, что $\deg(E) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$. **(4)** Покажите, что $\deg(E \otimes F) = \deg(E) r(F) + \deg(F) r(E)$. **(5)** Покажите, что $\deg(E(k)) = \deg(E) + k \cdot r(E)$.

Упражнение 6.4. Пусть $f : X \to Y$. **(1)** Покажите, что

$$f^*(E \otimes F) = f^* E \otimes f^* F,\ f^* \mathbf{S}^p E = \mathbf{S}^p f^* E,\ f^* \Lambda^p E = \Lambda^p f^* E,\ f^* \det E = \det f^* E.$$

(2) Проверьте, что если $X = \mathbb{P}(W)$, $Y = \mathbb{P}(V)$ и морфизм f индуцирован линейным вложением $W \to V$, то $\deg(f^* E) = \deg(E)$. **(3)** Докажите, что для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^n$ и расслоения E на $\mathbb{P}^n$ имеем $a_1^E(L)+\cdots+a_r^E(L) = \deg(E)$, где $a^E(L) = (a_1^E(L), \ldots, a_r^E(L))$ — тип расщепления E на L.

Используя степень легко доказать первую часть теоремы 5.8.
Доказательство теоремы 5.8 (1): Пусть $\deg(E) = d$, $r(E) = r$. Определим числа a_i индуктивно, полагая

$$a_i = \left\lceil (d - \sum_{j=1}^{i-1} a_j)/(r-i+1) \right\rceil,$$

где $\lceil x \rceil$ обозначает минимальное целое число, больше или равное x. Очевидно, что набор $a = (a_1, \ldots, a_r)$ минимальный среди наборов удовлетворяющих условиям

$$a_1 \geq a_2 \cdots \geq a_r \qquad \text{и} \sum_{i=1}^{r} a_i = d.$$

Следовательно, согласно Упр. 6.4 (3) набор a является оценкой снизу для типа расщепления расслоения E. □

6.2. **Прямой образ пучка.** Пусть $f : X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий и $\mathcal{E}$ — пучок на X. Определим пучок $f_*\mathcal{E}$ на Y равенствами

$$(f_*\mathcal{E})(U) = \mathcal{E}(f^{-1}(U))$$

для любого открытого подмножества $U \subset Y$.

Упражнение 6.5. **(1)** Покажите, что $f_*\mathcal{E}$ — пучок. **(2)** Докажите, что f_* — точный слева функтор. **(3)** Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Докажите изоморфизм функторов $g_*f_* \cong (gf)_*$. **(4)** Покажите, что отображение $s \in \mathcal{O}_X(U) \mapsto (s \cdot f) \in \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = (f_*\mathcal{O}_Y)(U)$ определяет морфизм пучков колец $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$. **(5)** Проверьте, что если $\mathcal{E}$ — пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей, то $f_*\mathcal{E}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. **(6)*** Докажите, что если пучок $\mathcal{E}$ квазикогерентен, то пучок $f_*\mathcal{E}$ тоже квазикогерентен.

Функтор f_* называется функтором прямого образа. Поскольку f_* точен слева было бы полезно определить правые производные функторы R^if_* — функторы высших прямых образов. Ситуация здесь аналогична ситуации с определением функторов когомологий H^i. Категория $\mathrm{Coh}(X)$ не содержит достаточного количество ацикличных относительно функтора f_* объектов, однако в категории $\mathrm{Sh}(X)$ таких объектов уже достаточно много. Поэтому можно воспользоваться вложением $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X)$ и определить функторы R^if_* в категории $\mathrm{Coh}(X)$ как ограничения соответствующих функторов с категории $\mathrm{Sh}(X)$. При этом оказывается, что определенные таким образом пучки $R^if_*\mathcal{E}$ являются квазикогерентными.

Кроме того, как и в случае когомологий можно вычислять высшие прямые образы пучков по Чеху. Здесь удобнее всего воспользоваться пучковым комплексом Чеха (см. Упр. 4.4).

Определение. Морфизм $f : X \to Y$ называется аффинным, если $\forall y \in Y$ найдется окрестность $y \in U \subset Y$, такая что морфизм $f : f^{-1}(U) \to U$ раскладывается в композицию замкнутого вложения $i : f^{-1}(U) \to U \times \mathbb{A}^n$ и проекции $U \times \mathbb{A}^n \to U$.

Упражнение 6.6. **(1)** Покажите, что если X — аффинно, то $f : X \to Y$ — аффинный. **(2)** Проверьте, что замкнутое вложение является аффинным морфизмом.

Упражнение 6.7. **(1)** Докажите, что для аффинного морфизма функтор f_* на категории квазикогерентных пучков точен. **(2)** Докажите, что если f — произвольный морфизм, а $U_\bullet$ — аффинное покрытие, то $R^i f_*(\underline{\mathcal{C}}^p_{\mathcal{E}}) = 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{E}$ и $i > 0$. **(3)** Докажите, что пучок $R^i f_* \mathcal{E}$ изоморфен i-ым когомологиям комплекса $f_*(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{E}})$. **(4)** Покажите, что из (3) и из Упр. 6.5 (6) следует квазикогерентность пучков $R^i f_* \mathcal{E}$.

В отличие от функтора f^* функтор f_* вообще говоря не сохраняет подкатегорию локально свободных пучков. Более того, если пучок $\mathcal{E}$ — когерентный, то не накладывая ограничений на морфизм f нельзя даже гарантировать когерентность пучка $f_*\mathcal{E}$. Разумным ограничением является проективность морфизма.

Определение. Морфизм $f : X \to Y$ называется проективным, если $\forall y \in Y$ найдется окрестность $y \in U \subset Y$, такая что морфизм $f : f^{-1}(U) \to U$ раскладывается в композицию замкнутого вложения $i : f^{-1}(U) \to U \times \mathbb{P}^n$ и проекции $U \times \mathbb{P}^n \to U$.

Теорема 6.8. *Если морфизм f проективен, то пучок $R^i f_* \mathcal{E}$ когерентен для любого когерентного пучка $\mathcal{E}$ и любого i.*

Следующее упражнение демонстрирует связь функтора прямого образа с функтором когомологий.

Упражнение 6.9. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. **(1)** Проверьте, что

$$R^i(gf)_* = \begin{cases} (R^i g_*) f_*, & \text{если морфизм } f \text{ — аффинный} \\ g_*(R^i f_*), & \text{если морфизм } g \text{ — аффинный.} \end{cases}$$

(2) Постройте точную последовательность

$$0 \to (R^1 g_*) f_* \mathcal{E} \to R^1(gf)_* \mathcal{E} \to g_*(R^1 f_* \mathcal{E}) \to (R^2 g_*) f_* \mathcal{E}$$

(3) Пусть $g : Y \to \mathrm{pt}$ — проекция в точку. Покажите, что $R^i g_* = \mathrm{H}^i(Y, -)$. **(4)** Докажите, что если f — аффинно, то $\mathrm{H}^i(Y, f_*\mathcal{E}) = \mathrm{H}^i(X, \mathcal{E})$. **(5)** Докажите, что если $U \subset Y$ — аффинно, то $(R^i f_* \mathcal{E})(U) = H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E})$.

6.3. **Формула проекции и сопряженность.** Пусть $f : X \to Y$ и $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$.

Теорема 6.10. *Для любого когерентного пучка $\mathcal{E}$ на Y имеем функториальный изоморфизм*

$$f_*(f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \cong \mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{F}.$$

Доказательство: Возьмем произвольное аффинное подмножество $U \subset Y$ и обозначим $U' = f^{-1}(U)$. Тогда пользуясь определениями функторов f_*, f^* и $\otimes$ получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(U, f_*(f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})) &= \Gamma(U', f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = (f^*\mathcal{E})(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{F}(U') = \\ &= \left(\mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U')\right) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{F}(U') = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{F}(U') = \\ &= \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} (f_*\mathcal{F})(U) = \Gamma(U, \mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{F}) \end{aligned}$$

$\square$

Упражнение 6.11. **(1)** Покажите, что $f_*f^*\mathcal{E} \cong \mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{O}$. **(2)** Докажите, что если $\mathcal{E}$ — локально свободный, то $R^if_*(f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \cong \mathcal{E} \otimes R^if_*\mathcal{F}$.

Пример 6.12. Пусть i — замкнутое вложение, а $\mathcal{E}$ — пучок на Y. Тогда $i_*(\mathcal{E}_{|X}) \cong \mathcal{E} \otimes i_*\mathcal{O}_X$.

Теорема 6.13 (Сопряженность функторов)**.** *Для любых пучков* $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(Y)$, $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ *существует изоморфизм функторов*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, f_*\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Доказательство: Выберем аффинное покрытие $Y = \bigcup U_i$ и пусть $U_i' = f^{-1}(U_i)$. Всякий морфизм $\phi : \mathcal{E} \to f_*\mathcal{F}$ — это набор морфизмов $\mathcal{O}_Y(U_i)$-модулей $\phi_i : \mathcal{E}(U_i) \to (f_*\mathcal{F})(U_i) = \mathcal{F}(U_i')$ согласованных на пересечениях множеств U_i. Тензорно умножая на $\mathcal{O}_X(U_i')$ над $\mathcal{O}_Y(U_i)$ и пользуясь структурой $\mathcal{O}_X(U_i')$-модуля на $\mathcal{F}(U_i')$ получаем морфизм

$$\psi_i : (f^*\mathcal{E})(U_i') = \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i') \to \mathcal{F}(U_i') \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i') \to \mathcal{F}(U_i').$$

Ясно, что морфизмы ψ_i согласованы на пересечениях множеств U_i' и, следовательно, склеиваются в морфизм $\psi : f^*\mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

Обратно, всякий морфизм $\psi : f^*\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — это набор морфизмов $\mathcal{O}_X(U_i')$-модулей

$$\psi_i : \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i') = (f^*\mathcal{E})(U_i') \to \mathcal{F}(U_i') = (f_*\mathcal{F})(U_i).$$

Компонируя его с морфизмом $\mathcal{E}(U_i) \xrightarrow{(-\otimes 1)} \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i')$ получаем морфизм $\mathcal{O}_Y(U_i)$-модулей $\phi_i : \mathcal{E}(U_i) \to (f_*\mathcal{F})(U_i)$, причем морфизмы ϕ_i склеиваются в морфизм пучков $\phi : \mathcal{E} \to f_*\mathcal{F}$.

Остается заметить, что построенный изоморфизм функториален и не зависит от выбора покрытия. $\square$

6.4. **Критерий Хоррокса.** Следующая теорема называется критерием Хоррокса расщепимости расслоений.

Теорема 6.14. *Расслоение E на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ полностью расщепимо тогда и только тогда когда выполнено* условие Хоррокса

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0 \qquad \textit{при } 1 \le p \le n-1 \textit{ и любом } k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство: Необходимость условия Хоррокса легко следует из определения полностью расщепимого расслоения и теоремы Ботта.

Достаточность условия будем доказывать индукцией по размерности n проективного пространства. При $n = 1$ ввиду теоремы Гротендика доказывать нечего. Предположим, что $n > 1$, теорема Хоррокса доказана для $n-1$ и для расслоения E на $\mathbb{P}^n$ выполнено условие Хоррокса. Выберем произвольную гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \cong H \subset \mathbb{P}^n$. Согласно 3.11 (2) имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_H \to 0.$$

Умножая ее на E и пользуясь 6.12, получаем точную последовательность

$$0 \to E(-1) \to E \to i_*i^*E \to 0. \tag{6.15}$$

Подкручивая последовательность (6.15) на $\mathcal{O}(k)$ и пользуясь длинной точной последовательностью когомологий, легко из условия Хоррокса для расслоения E доказать, что

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, i_*i^*E(k)) = 0 \quad \text{при } 1 \le p \le n-2 \text{ и любом } k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из Упр. 6.9 (3) и 6.6 (2) следует

$$\mathrm{H}^p(H, i^*E(k)) = 0 \quad \text{при } 1 \le p \le n-2 \text{ и любом } k \in \mathbb{Z}.$$

Значит расслоение i^*E на H удовлетворяет условиям Хоррокса, следовательно по предположению индукции существует изоморфизм $\phi : \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i) \to i^*E$.

Применим функтор $\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), -)$ к точной последовательности (6.15). Получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), E) \to \mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), i_*i^*E) \to \mathrm{Ext}^1(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), E(-1))$$

Заметим, что $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(a), E(-1)) = H^1(\mathbb{P}^n, E(-a-1)) = 0$ по условию Хоррокса. Кроме того по теореме 6.13 имеем

$$\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), i_*i^*E) \cong \mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i), i^*E).$$

Это значит, что изоморфизм ϕ можно продолжить до морфизма $\Phi : \oplus \mathcal{O}(a_i) \to E$ расслоений на $\mathbb{P}^n$. Докажем, что Φ обязательно является изоморфизмом. Для этого воспользуемся Упр. 6.2 (7). Заметим, что

$$\deg(E) = \deg(i^*E) = \deg(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i)) = \sum_{i=1}^r a_i = \deg(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)),$$

следовательно $\det E \cong \det(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)) \cong \mathcal{O}(d)$. Так как $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(d), \mathcal{O}(d)) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$, то всякий морфизм $\mathcal{O}(d) \to \mathcal{O}(d)$ есть умножение на константу, поэтому достаточно проверить, что $\det \Phi$ не равен тождественно нулю. Но это очевидно: $(\det \Phi)_{|H} = \det \phi \ne 0$. $\square$

Критерий Хоррокса имеет неожиданное следствие.

Теорема 6.16. *Расслоение E на $\mathbb{P}^n$ вполне расщепимо тогда и только тогда, когда вполне расщепимо его ограничение на какую-либо плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$.*

Доказательство: Необходимость условия очевидна, докажем достаточность. Ясно, что достаточно доказать, что при $n > 2$ расслоение E на $\mathbb{P}^n$ вполне расщепимо если вполне расщепимо его ограничение на какую-либо гиперплоскость $i : H \subset \mathbb{P}^n$. Допустим i^*E вполне расщепимо. Значит для расслоения i^*E выполнено условие Хоррокса. Но тогда из точной последовательности когомологий последовательности (6.15), подкрученной на $\mathcal{O}(k)$ следует, что для любого k индуцированный морфизм

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k-1)) \to \mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k))$$

является изоморфизмом при $2 \le p \le n-2$, вложением при $p = n-1$ и сюрьекцией при $p = 1$. Однако, по теореме Картана B при $k >> 0$ имеем $\mathrm{H}^{>0}(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$, значит при $2 \le p \le n-1$ и любом k имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$. Аналогично, по теореме Картана B$'$ при $k << 0$ имеем $\mathrm{H}^{<n}(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$, значит при $1 \le p \le n-2$ и любом k имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$. Следовательно, для расслоения E выполнено условие Хоррокса, значит E вполне расщепимо. $\square$

7. Теорема о замене базы.

Пусть $f : X \to Y$. Функтор прямого образа f_* (высшего прямого образа $R^i f_*$) можно воспринимать как взятие послойных глобальных сечений (когомологий). Однако, вообще говоря, неверно, что $(R^i f_* \mathcal{E})_y = \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{E}_{|X_y})$, где $(-)_y$ обозначает геометрический слой пучка в точке $y \in Y$, а $X_y = f^{-1}(y) \subset X$ — слой морфизма f. Однако, при соблюдении некоторых условий это равенство соблюдается. Необходимые условия формултруются в теореме полунепрерывности и теореме о замене базы.

7.1. Теорема полунепрерывности.

Определение. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм, а $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$. Пучок $\mathcal{F}$ называется плоским над Y, если $\forall x \in X$ существуют окрестности $x \in U \subset X$ и $f(x) \in U' \subset f(U) \subset Y$, такие что $\mathcal{F}(U)$ является плоским $\mathcal{O}_Y(U')$-модулем.

Определение. Морфизм $f : X \to Y$ называется плоским, если $\mathcal{O}_X$ — плоский пучок над Y.

Упражнение 7.1. **(1)** Докажите, что морфизм f плоский тогда и только тогда когда функтор f^* точен. **(2)** Докажите, что если f — плоский морфизм, то всякий локально свободный пучок на X является плоским над Y. **(3)** Покажите, что открытое вложение является плоским морфизмом, а замкнутое вложение не является. **(4)** Покажите, что проекция $Y \times Z \to Y$ является плоским морфизмом. **(5)** Проверьте, что композиция плоских морфизмов — плоский морфизм.

Определение плоского пучка и морфизма несколько ненаглядно и негеометрично. Однако существует наглядное и геометрическое достаточное условие плоскости, которого будет выполняться во всех необходимых нам примерах.

Теорема 7.2. *Допустим $f : X \to Y$ — морфизм гладких многообразий, причем для любой точки $x \in X$ дифференциал $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ — сюрьективен. Тогда морфизм f плоский.*

Пусть $f : X \to Y$ и $u : Y' \to Y$ — произвольные морфизмы. Многообразие

$$X \times_Y Y' = \{(x, y') \in X \times Y' \mid f(x) = u(y')\}$$

называется расслоенным произведением многообразий X и Y' над Y.

Теорема 7.3 (Плоская замена базы)**.** *Пусть $f : X \to Y$ — произвольный морфизм, а $u : Y' \to Y$ — плоский морфизм. Пусть $X' = X \times_Y Y'$ и обозначим индуцированные проекции $X' \to Y'$ и $X' \to X$ через g и v. Тогда для любого пучка $\mathcal{F}$ на X имеем функториальный изоморфизм*

$$(R^i g_*) v^* \mathcal{F} \cong u^* (R^i f_*) \mathcal{F}.$$

Доказательство: Выберем аффинные подмножества $U' \subset Y'$ и $u(U') \subset U \subset Y$, так чтобы $\mathcal{O}_{Y'}(U')$ был плоским $\mathcal{O}_Y(U)$-модулем. Пусть $V = f^{-1}(U)$ и $V' = g^{-1}(U') = v^{-1}(V) = V \times_U U'$. Тогда по 6.9 (5)

$$\Gamma(U', (R^i g_*) v^* \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(V', v^* \mathcal{F}),$$
$$\Gamma(U', u^*(R^i f_*)\mathcal{F}) = \Gamma(U, R^i f_* \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') = \mathrm{H}^i(V, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U').$$

Таким образом, нам надо доказать, что

$$\mathrm{H}^i(V', v^* \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(V, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U').$$

Воспользуемся для этого комплексом Чеха. Выберем открытое аффинное покрытие $V = \bigcup V_j$. Тогда $V'_j = v^{-1}(V_j) = V_j \times_U U'$ — аффинное покрытие V'. Заметим, что

$$(v^*(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}}))(V') = (\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_{X'}(V') = (\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U'),$$

причем легко видеть, что

$$\mathcal{F}(V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') == v^*\mathcal{F}(V'_{i_0} \cap \cdots \cap V'_{i_p}),$$

значит

$$(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') = (\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{v^*\mathcal{F}})(V')$$

Остается сказать, что $\mathcal{O}_{Y'}(U')$ является плоским $\mathcal{O}_Y(U)$-модулем, поэтому когомологии левой части равенства совпадают с когомологиями комплекса $(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{F}})(V)$, умноженными на $\mathcal{O}_{Y'}(U')$, то есть с $\mathrm{H}^i(V, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U')$, в то вермя как когомологии правой части равенства совпадают с $\mathrm{H}^i(V', v^*\mathcal{F})$ что и требовалось доказать. □

Определение. Функция $\phi : Y \to \mathbb{Z}$ называется полунепрерывной сверху, если $\forall s \in \mathbb{Z}$ множество $\{y \in Y \mid \phi(y) \geq s\}$ замкнуто (по Зарисскому).

Теорема 7.4 (Теорема полунепрерывности). *Пусть f — проективный морфизм, а $\mathcal{F}$ — пучок плоский над Y. Тогда функция*

$$\mathrm{h}^i_{\mathcal{F}}(y) = \dim \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y})$$

полунепрерывна сверху.

Из теоремы полунепрерывности легко вывести вторую часть теоремы 5.8.
Доказательство теоремы 5.8 (2): Нам надо доказать замкнутость множества $M_a = \{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E(L) > a\}$. Для каждого $1 \leq k \leq r$ обозначим через $a_{[1,k]}$ набор $(a_1, \ldots, a_k)$ и через $a_{[1,k]} - 1$ набор $(a_1, \ldots, a_k - 1)$. Рассмотрим также множества

$$\begin{aligned} M_k(a_{[1,k]}) &= \{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E_{[1,k]}(L) > a_{[1,k]}\}, \\ M'_k(a_{[1,k]}) &= \{L \in \mathbb{G}_n \mid \mathrm{h}^0(L, E_{|L}(-a_k - 1)) > \textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(a_i - a_k)\}. \end{aligned}$$

Из теоремы полунепрерывности легко следует, что $M'_k(a_{[1,k]})$ — замкнуто для любого k. Кроме того, ясно что $M_1(a_1) = M'_1(a_1)$, следовательно $M_1(a_1)$ тоже замкнуто. Заметим, наконец, что

$$\begin{aligned} & M_k(a_{[1,k]}) = \{L \in \mathbb{G}_n \mid (a^E_{[1,k]}(L)) > a_{[1,k]}\} = \\ & = \left\{L \;\middle|\; a^E_{[1,k-1]}(L) > a_{[1,k-1]}\right\} \cup \left\{L \;\middle|\; a^E_{[1,k-1]}(L) = a_{[1,k-1]} \text{ и } a^E_k(L) > a_k\right\} = \\ & = M_{k-1}(a_{[1,k-1]}) \cup \Big(\big(M_{k-1}(a_{[1,k-1]} - 1) \setminus M_{k-1}(a_{[1,k-1]})\big) \cap M'_k(a_{[1,k]})\Big) = \\ & \qquad\qquad = M_{k-1}(a_{[1,k-1]}) \cup (M_{k-1}(a_{[1,k-1]} - 1) \cap M'_k(a_{[1,k]})). \end{aligned}$$

откуда легко выводится замкнутость всех $M_k(a_{[1,k]})$ индукцией по k. Остается заметить, что $M_a = M_r(a_{[1,r]})$. □

Теорема 7.5 (Теорема о замене базы). *Пусть f — проективный морфизм, а $\mathcal{F}$ — пучок плоский над Y, Y — гладкое многообразие, а функция $\mathrm{h}^i_{\mathcal{F}}(y)$ постоянна на Y. Тогда пучок $R^i f_* \mathcal{F}$ локально свободен и имеем изоморфизм*

$$(R^i f_* \mathcal{F})_y \cong \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y}).$$

7.2. **Раздутие точки.** Пусть Y — гладкое многообразие с точкой $y \in Y$. Раздутием многообразия Y в точке y называется гладкое многообразие $\widetilde{Y}_y$ с отображением $\sigma : \widetilde{Y}_y \to Y$, таким что

$$\sigma^{-1}(Y - y) = Y - y, \qquad \sigma^{-1}(y) = \mathbb{P}(T_y Y).$$

Докажем существование раздутий. Заметим, во-первых, что достаточно уметь строить раздутие в сколь угодно малой окрестности точки y. Действительно, если $\widetilde{U}_y$ — раздутие окрестности U, то отображение σ позволяет склеить $\widetilde{Y}_y = \widetilde{U}_y \bigsqcup_{U-y}(Y - y)$. Выберем теперь такую окрестность U точки y, что U изоморфно открытому подмножеству аффинного пространства $V = \mathbb{A}^n$ (это не всегда возможно в топологии Зарисского, но заведомо возможно в аналитической топологии; соответственно приводимая ниже конструкция раздутия дает вообще говоря не алгебраическое, а лишь комплексно-аналитическое многообразие, однако можно доказать, что это многообразие все-таки является алгебраическим). Построим теперь раздутие $\widetilde{U}_y$ явным образом. Ясно, что мы можем выбрать вложение $U \subset V$, так что $y = \{0\} \in V$. Рассмотрим замкнутое подмножество

$$X = \{(u, L) \in U \times \mathbb{P}(V) \mid u \in L \subset V\} \subset U \times \mathbb{P}(V).$$

Пусть $\sigma(u, L) = u$ и $p(x, L) = L$. Рассматривая проекцию $p : X \to \mathbb{P}(V)$ легко доказать гладкость X. Далее, ясно, что $\sigma^{-1}(U - \{0\}) = U - \{0\}$, $\sigma^{-1}(\{0\}) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(T_y U)$, что и требовалось.

Далее, не сложно доказать, что построенное многообразие $\widetilde{Y}_y$ не зависит от выбора окрестности Y и что любое многообразие, являющееся раздутием Y в y изоморфно построенному выше.

Упражнение 7.6. Проверьте, что раздутие $\sigma : \widetilde{Y}_y \to Y$ является проективным, но не плоским морфизмом.

Теорема 7.7. *Пусть $\sigma : \widetilde{Y}_y \to Y$ — раздутие точки. Тогда*

$$R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_y} = \begin{cases} \mathcal{O}_Y, & \textit{при } i = 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Выберем окрестность $y \in U$ как и при построении раздутия. По теореме о плоской замене базы имеем

$$(R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_y})_{|(Y-y)} = R^i \sigma_* (\mathcal{O}_{\sigma^{-1}(Y-y)}), \quad (R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_y})_{|U} = R^i \sigma_* (\mathcal{O}_{\widetilde{U}_y}),$$

причем так как σ дает изоморфизм $\sigma^{-1}(Y - y) \to Y - y$, то

$$R^i \sigma_* (\mathcal{O}_{\sigma^{-1}(Y-y)}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{Y-y}, & \text{при } i = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

поэтому достаточно проверить утверждение для U. Для этого воспользуемся явной конструкцией раздутия $\widetilde{U}_y$. Напомним, что если $U \subset V = \mathbb{A}^n$ и $y = \{0\} \in V$, то $\widetilde{U}_y = X$, где

$$X = \{(u, L) \in U \times \mathbb{P}(V) \mid u \in L \subset V\} \subset U \times \mathbb{P}(V).$$

Обозначим через i вложение $X \to U \times \mathbb{P}(V)$ и через q проекцию $U \times \mathbb{P}(V) \to U$. Ясно, что $\sigma = q \cdot i$, причем так как i — замкнутое вложение, то $R^i \sigma_* \mathcal{O}_X = R^i q_* (i_* \mathcal{O}_X)$.

Применяя к точной последовательности Эйлера на $\mathbb{P}(V)$ функтор p^*, получим точную последовательность на $U \times \mathbb{P}(V)$

$$0 \to p^*\mathcal{O}(-1) \to V \otimes \mathcal{O} \to p^*T(-1) \to 0.$$

Кроме того, вложение $U \subset V$ задает сечение $\mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}$. Компонируя его с проекцией $V \otimes \mathcal{O} \to p^*T(-1)$, получаем сечение $s \in \Gamma(U \times \mathbb{P}(V), p^*T(-1))$. Заметим, что сечение s обращается в нуль в точке (u, L) тогда и только тогда, когда $u \in L \subset V$. Другими словами, множество нулей сечения s совпадает с подмногообразием $X \subset U \times \mathbb{P}(V)$. Кроме того, $\operatorname{codim} X = \dim \mathbb{P}(V) = r(p^*T(-1))$, поэтому комплекс Кошуля (см. Упр. 3.13) является резольвентой пучка $i_*\mathcal{O}_X$, то есть точна следующая последовательность пучков на $U \times \mathbb{P}(V)$

$$\cdots \to \Lambda^2(p^*\Omega(1)) \to p^*\Omega(1) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_X \to 0,$$

где $\Omega := T^*$ — пучок дифференциалов. Применяя функтор q_* и пользуясь теоремой о плоской замене базы в применении к декартову квадрату

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}(V) \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & {\scriptstyle q'}\big\downarrow \\ U & \xrightarrow{p'} & \mathrm{pt} \end{array}$$

получаем $\quad R^i q_* \Lambda^k(p^*\Omega(1)) = R^i q_*(p^*\Lambda^k(\Omega(1))) =$

$$= (p')^*(R^i q'_* \Lambda^k(\Omega(1))) = \mathrm{H}^i(\mathbb{P}(V), \Lambda^k(\Omega(1))) \otimes \mathcal{O}_U.$$

Упражнение 7.8. Докажите, что при $k > 0$ имеем $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}(V), \Lambda^k(\Omega(1))) = 0$ для всех i.

Из Упражнения следует, что

$$R^i\sigma_*\mathcal{O}_X = R^i q_* i_* \mathcal{O}_X = \begin{cases} \mathcal{O}_U, & \text{при } i = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

что и требовалось доказать. □

7.3. **Стандартная диаграмма.** Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим многообразие частичных флагов $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(1, 2; V) = \{(x, l) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}_n \mid x \in l\}$. Обозначим через p и q проекции $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^n$ и $\mathbb{F}_n \to \mathbb{G}_n$ соответственно. Для всякой точки $x \in \mathbb{P}^n$ обозначим

$$\mathbb{F}(x) = p^{-1}(x) \subset \mathbb{F}_n, \qquad \mathbb{G}(x) = q(\mathbb{F}(x)) \subset \mathbb{G}_n.$$

Легко показать, что q индуцирует изоморфизм

$$q : \mathbb{F}(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}(x) = \mathbb{P}(V/x) = \mathbb{P}^{n-1}.$$

Аналогично, для всякой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ положим $\widetilde{L} = q^{-1}(\{L\})$. Ясно, что p индуцирует изоморфизм $p : \widetilde{L} \to L \subset \mathbb{P}^n$. Таким образом, p является расслоением со слоем $\mathbb{P}^{n-1}$, а q является расслоением со слоем $\mathbb{P}^1$.

Наконец, пусть

$$\mathbb{B}(x) = q^{-1}(\mathbb{G}(x)) = \{(y, l) \in \mathbb{F}_n \mid x, y \in l\}.$$

Обозначим ограничение проекции q на $\mathbb{B}(x)$ через f, а ограничение проекции p на $\mathbb{B}(x)$ через σ.

Упражнение 7.9. Покажите, что f — расслоение над $\mathbb{G}(x) = \mathbb{P}^{n-1}$ со слоем $\mathbb{P}^1$, а σ — раздутие $\mathbb{P}^n$ в точке x.

Набор построенных многообразий и отображений называется **стандартной диаграммой**. Стандартная диаграмма оказывается весьма полезной, если мы хотим получить какую-либо информацию о расслоении на $\mathbb{P}^n$, основываясь на информации о его ограничении на прямые в $\mathbb{P}^n$.

Теорема 7.10. *Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^n$, а $x \in \mathbb{P}^n$. Допустим E тривиально ограничивается на всякую прямую, проходящую через точку x. Тогда E тривиально.*

Доказательство: Рассмотрим расслоение $\sigma^* E$ на $\mathbb{B}(x)$. Ясно, что для всякой точки $L \in \mathbb{G}(x)$ имеем

$$(\sigma^* E)_{|f^{-1}(\{L\})} = (\sigma^* E)_{|\widetilde{L}} = p^*(E_{|L}) = p^*(\mathcal{O}_L^{\oplus r}) = \mathcal{O}_{\widetilde{L}}^{\oplus r},$$

значит мы можем использовать теорему о замене базы по отношению к расслоению $\sigma^* E$ и морфизму f. Из теоремы следует, что $F = f_* \sigma^* E$ является расслоением на $\mathbb{G}(x)$, причем $F_{|\{L\}} = \mathrm{H}^0(f^{-1}(\{L\}), \sigma^* E)$. Отсюда следует, что каноническое отображение $f^* F \to \sigma^* E$ является изоморфизмом на каждой прямой $\widetilde{L}$, то есть $\sigma^* E \cong f^* F$.

Заметим теперь, что проекция $f : \mathbb{B}(x) \to \mathbb{G}(x)$ обладает сечением $s : \mathbb{G}(x) \to \mathbb{B}(x)$, $s(\{L\}) = (x, L) \in \mathbb{B}(x)$. Заметим далее, что $f \cdot s = \mathrm{id}$, а $\sigma \cdot s$ — проекция $\mathbb{G}(x) \to \{x\}$. Отсюда следует, что

$$F \cong \mathrm{id}^* F \cong s^* f^* F \cong s^* \sigma^* E \cong (\sigma \cdot s)^* E = (E_{|x}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}(x)} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}(x)}^{\oplus r}.$$

Далее, пользуясь формулой проекции и теоремой 7.7, получаем

$$E \cong E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong E \otimes \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)} \cong \sigma_* \sigma^* E \cong \sigma_* f^* F \cong \sigma_* f^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}(x)}^{\oplus r} \cong \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Из доказанной теоремы вытекает полезное следствие.

Теорема 7.11. *Если расслоение E на $\mathbb{P}^n$ порождается глобальными сечениями и $\deg(E) = 0$, то E тривиально.*

Доказательство: Так как E порождается глобальными сечениями, то ограничение $E_{|L}$ на любую прямую тоже порождается глобальными сечениями, значит тип расщепления $a^E(L)$ удовлетворяет условию $a_i^E(L) \geq 0$. С другой стороны, $\sum_{i=1}^r a_i^E(L) = \deg(E) = 0$, значит $a_i^E(L) = 0$ для всех i. Другими словами, ограничение E на любую прямую тривиально. Значит выполнены условия теоремы 7.10, следовательно E тривиально. $\square$

8. Классы Чженя

8.1. **Классы когомологий подмногообразий.** Пусть X — гладкое проективное многообразие. Обозначим через $\mathrm{H}_\bullet(X,\mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})$ группы сигулярных гомологий и когомологий многообразия X по модулю кручения. Всякому замкнутому подмногообразию $Y \subset X$ можно сопоставить его фундаментальный класс $o_Y \in \mathrm{H}_{2\dim Y}(X,\mathbb{Z})$. С другой стороны, двойственность Пуанкаре задает изоморфизм

$$\mathrm{H}_{2\dim Y}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2\operatorname{codim} Y}(X,\mathbb{Z}).$$

Обозначим через $[Y] \in \mathrm{H}^{2\operatorname{codim} Y}(X,\mathbb{Z})$ образ фундаментального класса o_Y в когомологиях. Класс $[Y]$ называется классом когомологий подмногообразия Y.

Упражнение 8.1. **(1)** Покажите, что для всякого морфизма гладкого проективного морфизма $f : X \to X'$ двойственность Пуанкаре индуцирует гомоморфизм прямого образа

$$f_* : \mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2(\dim X'-\dim X)+\bullet}(X',\mathbb{Z}).$$

(2) Пусть $i : Z \to X$ — замкнутое вложение гладких многообразий. Докажите формулу проекции

$$i_*i^*[Y] = [Y]\cdot[Z].$$

Упражнение 8.2. **(1)** Покажите, что $\mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ при $0 \le i \le n$ и равно нулю в противном случае. **(2)** Проверьте, что $H^{2k}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^{n-k}]$. **(3)** Докажите изоморфизм градуированных алгебр $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$, где $h = [\mathbb{P}^{n-1}] \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$ — класс гиперплоскости.

8.2. **Классы Чженя линейных расслоений.** Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на гладком проективном многообразии X. Рациональным сечением расслоения $\mathcal{L}$ называется сечение $\mathcal{L}$, определенное на открытом (по Зарисскому) подмножестве $U \subset X$. Обозначим множество рациональных сечений расслоения $\mathcal{L}$ через $\Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{L})$.

Лемма 8.3. *Для любого линейного расслоения $\mathcal{L}$ имеем $\Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{L}) \ne 0$.*

Доказательство: Пусть $i : X \to \mathbb{P}^n$ — вложение в проективное пространство. По теореме Картана А найдется $k \in \mathbb{Z}$, такое что $\Gamma(X,\mathcal{L}\otimes i^*\mathcal{O}(k)) = \Gamma(\mathbb{P}^n,(i_*\mathcal{L})(k) \ne 0)$. Пусть $0 \ne s \in \Gamma(X,\mathcal{L}\otimes i^*\mathcal{O}(k))$ — произвольное ненулевое сечение. Выберем гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$, не содержащую $i(X)$. Пусть $z \in \Gamma(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(1))$ — ее уравнение. Пусть $U = X - \{z = 0\} \subset X$. Тогда ясно, что s/z^k — определенное на U сечение расслоения $\mathcal{L}$. □

Определение. Определим первый класс Чженя линейного расслоения $\mathcal{L}$ как

$$\mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = [\mathrm{div}_0(s)] - [\mathrm{div}_\infty(s)] \in \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}),$$

где $0 \ne s \in \Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{L})$ — произвольное рациональное сечение расслоения $\mathcal{L}$, а $\mathrm{div}_0(s) = \{s = 0\}$ и $\mathrm{div}_\infty(s) = \{s = \infty\}$ — дивизоры нулей и полюсов сечения s.

Теорема 8.4. *Определение $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$ корректно (не зависит от выбора сечения s). Кроме того,*

$$\mathrm{c}_1(\mathcal{L}^*) = \mathrm{c}_1(\mathcal{L}), \quad \mathrm{c}_1(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}') = \mathrm{c}_1(\mathcal{L}) + \mathrm{c}_1(\mathcal{L}'), \quad \mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = f^*(\mathrm{c}_1(\mathcal{L})).$$

Доказательство: Допустим s' — другое рациональное сечение расслоения $\mathcal{L}$. Тогда $s' = s\cdot\phi$, где $\phi\in\Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{O})$ — рациональная функция на X. Ясно, что

$$\Big([\mathrm{div}_0(s')] - [\mathrm{div}_\infty(s')]\Big) - \Big([\mathrm{div}_0(s)] - [\mathrm{div}_\infty(s)]\Big) = [\mathrm{div}_0(\phi)] - [\mathrm{div}_\infty(\phi)],$$

поэтому достаточно проверить, что $[\mathrm{div}_0(\phi)] - [\mathrm{div}_\infty(\phi)] = 0$. Заметим, что ϕ задает отображение $X\to\mathbb{P}^1$, причем

$$[\mathrm{div}_0(\phi)] - [\mathrm{div}_\infty(\phi)] = \phi^*[\{0\}] - \phi^*[\{\infty\}] = \phi^*([\{0\}] - [\{\infty\}]) = 0$$

так как $[\{0\}] = [\{\infty\}]\in\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1,\mathbb{Z})$.

Пусть теперь s и s' — рациональные сечения расслоений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$. Тогда ясно, что s^{-1}, $s\otimes s'$ и f^*s — рациональные сечения расслоений $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$ и $f^*\mathcal{L}$ соответственно, откуда легко следуют все формулы. $\square$

Упражнение 8.5. Проверьте, что $\mathrm{c}_1(\mathcal{O}(k)) = k\,\mathrm{h}$.

8.3. **Проективизация расслоения.** Пусть E — векторное расслоение на X. Пусть U_i — тривиализующее покрытие для E, а $g_{ij} : U_i\cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ — соответствующий коцикл. Склеим теперь произведения $U_i\times\mathbb{P}^{r-1}$ с помощью коцикла g_{ij}, отождествляя

$$U_i\times\mathbb{P}^{r-1}\supset (U_i\cap U_j)\times\mathbb{P}^{r-1}\xrightarrow{g_{ji}}(U_i\cap U_j)\times\mathbb{P}^{r-1}\subset U_j\times\mathbb{P}^{r-1}$$

Полученное многообразие обозначается через $\mathbb{P}_X(E)$ и называется *проективизацией* расслоения E. Легко видеть, что локальные проекции $p_i : U_i\times\mathbb{P}^{r-1}\to U_i$ склеиваются в проекцию $p_E : \mathbb{P}_X(E)\to X$.

Упражнение 8.6. (1) Проверьте, что определение многообразия $\mathbb{P}_X(E)$ и проекции p_E не зависит от выбора тривиализации расслоения E. **(2)** Покажите, что для любого линейного расслоения $\mathcal{L}$ на X имеем $\mathbb{P}_X(E\otimes\mathcal{L}) = \mathbb{P}_X(E)$, $p_{E\otimes\mathcal{L}} = p_E$. **(3)** Проверьте, что $\mathbb{P}_X(W\otimes\mathcal{O}_X) = X\times\mathbb{P}(W)$.

В отличие от локальных проекций p_i, локальные проекции $q_i : U_i\times\mathbb{P}^{r-1}\to\mathbb{P}^{r-1}$ вообще говоря не склеиваются, однако линейные подрасслоения расслоения $q_i^*\mathcal{O}(-1)\subset\mathbb{C}^r\otimes\mathcal{O}_{U_i\times\mathbb{P}^{r-1}} = p^*E_{|U_i}$ склеиваются в линейное подрасслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(-1)\subset p^*E$ — *тавтологическое подрасслоение*. Для краткости в тех случаях, когда это не может привести к путанице, мы будем вместо $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(-1)$ писать просто $\mathcal{O}(-1)$. Как обычно, $\mathcal{O}(1)$ обозначает двойственное линейное расслоение, а $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.

Упражнение 8.7. (1) Покажите, что ограничение расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(1)$ на каждый слой $p^{-1}(x) = \mathbb{P}^{r-1}$ изоморфно расслоению $\mathcal{O}(1)$. **(2)** Проверьте, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E\otimes\mathcal{L})/X}(-1) = p^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(-1)$.

8.4. **Общее определение классов Чженя.** Обозначим

$$\xi = \xi_E = \mathrm{c}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(1))\in\mathrm{H}^2(\mathbb{P}_X(E),\mathbb{Z}).$$

Из Упр. 8.7 (1) следует, что ограничение ξ на всякий слой $p^{-1}(x) = \mathbb{P}^{r-1}$ совпадает с классом $\mathrm{h}\in\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^{r-1},\mathbb{Z})$. Следовательно, согласно Упр. 8.2 классы $1,\xi,\dots,\xi^{r-1}$ являются глобальными когомологическими классами на $\mathbb{P}_X(E)$, а их ограничения на всякий слой образуют базис в его когомологиях. Но отсюда по теореме Лере-Хирша следует, что

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}_X(E),\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})\langle 1,\xi,\dots,\xi^{r-1}\rangle,$$

то есть кгомологии $\mathbb{P}_X(E)$ являются свободным модулем над когомологиями X с базисом $1, \xi, \ldots, \xi^{r-1}$. Рассмотрим элемент $\xi^r \in \mathrm{H}^{2r}(\mathbb{P}_X(E), \mathbb{Z})$. Согласно вышесказанному существует единственный набор когомологических классов $\mathrm{c}_i(E) \in \mathrm{H}^{2i}(X, \mathbb{Z})$ $(i = 1, \ldots, r)$, такой что

$$\xi_E^r + p_E^* \mathrm{c}_1(E) \cdot \xi_E^{r-1} + \cdots + p_E^* \mathrm{c}_r(E) = 0. \tag{8.8}$$

Классы $\mathrm{c}_i(E)$ называются **классами Чженя** расслоения E.

Теорема 8.9. *Общее определение классов Чженя согласовано с определением класса* $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$. *Кроме того, классы Чженя функториальны, то есть для всякого морфизма* $f : Y \to X$ *имеем* $\mathrm{c}_i(f^*E) = f^* \mathrm{c}_i(E)$.

Доказательство: Ясно, что $\mathbb{P}_X(\mathcal{L}) = X$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{L})/X}(-1) = \mathcal{L}$, следовательно $\xi = \mathrm{c}_1(\mathcal{L}^*) = -\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$. Но тогда очевидно выполнено соотношение $\xi + \mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = 0$, которое и означает согласованность старого и нового определения.

Докажем теперь функториальность. Пусть $f : Y \to X$. Тогда легко проверить, что $\mathbb{P}_Y(f^*E) = Y \times_X \mathbb{P}_X(E)$, $F^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y(f^*E)}(1)$ (F обозначает проекцию $\mathbb{P}_Y(f^*E) \to \mathbb{P}_X(E)$), следовательно по теореме 8.4 имеем $F^*\xi_E = \xi_{f^*E}$. Применяя к $(*)$ функтор F^* и пользуясь соотношением $F^*p_E^* = p_{f^*E}^* f^*$ получаем уравнение

$$\xi_{f^*E}^r + p_{f^*E}^* f^* \mathrm{c}_1(E) \cdot \xi_{f^*E}^{r-1} + \cdots + p_{f^*E}^* f^* \mathrm{c}_r(E) = 0,$$

откуда следует $p_{f^*E}^*(\mathrm{c}_i(f^*E) - f^* \mathrm{c}_i(E)) = 0$, но так как $p_{f^*E}^*$ — вложение, то функториальность доказана. $\square$

8.5. **Формула Уитни.** Одним из важнейших свойств классов Чженя является их поведение в точных последовательностях векторных расслоений. Для удобства определим **полный класс Чженя** расслоения E ранга r как

$$\mathrm{c}(E) = 1 + \mathrm{c}_1(E) + \cdots + \mathrm{c}_r(E) \in \mathrm{H}^{\bullet}(X, \mathbb{Z}).$$

Теорема 8.10 (Теорема Уитни). *Пусть* $0 \to E \to F \to G \to 0$ *— точная последовательность векторных расслоений. Тогда*

$$\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(E) \cdot \mathrm{c}(G).$$

Доказательство: Воспользуемся индукцией по рангу расслоения G. Рассмотрим сначала случай $r(G) = 1$. Пусть $r = r(E)$. Обозначим $Y = \mathbb{P}_X(F)$. Композиция $\mathcal{O}_{Y/X}(-1) \to p^*F \to p^*G$ дает сечение $s \in \Gamma(Y, (p^*G) \otimes \mathcal{O}_{Y/X}(1))$. Ясно, что множество нулей сечения s совпадает с подмногообразием $Z = \mathbb{P}_X(E) \subset \mathbb{P}_X(F) = Y$. Отсюда следует, что $[Z] = \mathrm{c}_1((p^*G) \otimes \mathcal{O}_{Y/X}(1)) = \xi_F + p^* \mathrm{c}_1(G)$. Рассмотрим следующие многочлены с коэффициентами в $\mathrm{H}^{\bullet}(X, \mathbb{Z})$

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & x^r + p^* \mathrm{c}_1(F) \cdot x^{r-1} + \cdots + p^* \mathrm{c}_r(F), \\ \tilde{p}(x) & = & x^{r-1} + p^* \mathrm{c}_1(E) \cdot x^{r-2} + \cdots + p^* \mathrm{c}_{r-1}(E). \end{array}$$

Заметим, что $\mathcal{O}_{Y/X}(1)_{|Z} = \mathcal{O}_{Z/X}(1)$, поэтому $(\xi_F)_{|Z} = \xi_E$. Значит $\tilde{p}(\xi_F)_{|Z} = \tilde{p}(\xi_E) = 0$, следовательно согласно Упр. 8.1 (2) имеем

$$0 = \tilde{p}(\xi_F) \cdot [Z] = \tilde{p}(\xi_F) \cdot (\xi_F + p^* \mathrm{c}_1(G)),$$

следовательно по определению классов Чженя $p(x) = \tilde{p}(x) \cdot (x + p^* \mathrm{c}_1(G))$. Подставляя $x = 1$ получаем $\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(E) \cdot \mathrm{c}(G)$, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что $r > 1$. Рассмотрим многообразие $X' = \mathbb{P}_X(G) \xrightarrow{p_G} X$. Обозначим через G' факторрасслоение $p_G^*G/\mathcal{O}_{X'/X}(-1)$, через F' ядро проекции $p_G^*E \to p_G^*G \to G'$. Тогда на многообразии X' имеются следующие точные последовательности расслоений:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}_{X'/X}(-1) \to p_G^*G \to G' \to 0 \\ 0 \to F' \to p_G^*E \to G' \to 0 \\ 0 \to p_G^*F \to F' \to \mathcal{O}_{X'/X}(-1) \to 0 \end{aligned}$$

Заметим, что $r(G') < r(G)$, $r(\mathcal{O}_{X'/X}(-1)) = 1 < r(G)$. Из функториальности классов Чженя и предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} p_G^*\,\mathrm{c}(E) = \mathrm{c}(F')\cdot\mathrm{c}(G') = (p_G^*\,\mathrm{c}(F)\cdot\mathrm{c}(\mathcal{O}_{X'/X}(-1)))\cdot\mathrm{c}(G') = \\ = p_G^*\,\mathrm{c}(F)\cdot(\mathrm{c}(\mathcal{O}_{X'/X}(-1))\cdot\mathrm{c}(G')) = p_G^*\,\mathrm{c}(F)\cdot p_G^*\,\mathrm{c}(G) = p_G^*(\mathrm{c}(F)\cdot\mathrm{c}(G)), \end{aligned}$$

но так как p_G^* — вложение, то все доказано. □

8.6. **Принцип расщепления.** Принцип расщепления гласит следующее

> *при вычислениях с классами Чженя расслоения E можно считать, что $E = \oplus_{i=1}^r L_i$ — сумма линейных расслоений*

В его основе лежит следующая теорема.

Теорема 8.11. *Пусть E — расслоение на многообразии X. Тогда существует многообразие $p : Y \to X$ и фильтрация подрасслоениями $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{r-1} \subset E_r = p^*E$, такие что для всякого i $L_i := E_i/E_{i-1}$ — линейное расслоение, функтор p^* дает вложение $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})$ является целым расширением кольца $\mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{Z})$.*

Доказательство: Воспользуемся индукцией по рангу $r = r(E)$. При $r = 1$ доказывать нечего (достаточно рассмотреть $Y = X$). Пусть $r > 1$. Рассмотрим $X' = \mathbb{P}_X(E) \xrightarrow{q} X$, $L = \mathcal{O}_{X'/X}(-1)$, $E' = q^*E/L$. Применим к паре (X', E') предположение индукции. Пусть $p' : Y \to X'$ и $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_{r-1} = (p')^*E'$ — соответствующие многообразие и фильтрация. Пусть теперь $p = q\cdot p' : Y \to X$, $E_1 = (p')^*L$ и $E_i = \mathrm{Ker}(p^*E \to (p')^*E' \to (p')^*(E'/E'_{i-1})$ для всех $2 \le i \le r$. Тогда легко проверить, что полученное многообразие и фильтрация обладают необходимыми свойствами. □

Обозначим $\mathrm{x}_i(E) = \mathrm{c}_1(L_i)$ — первые классы Чженя линейных расслоений из теоремы 8.11. Согласно теореме они лежат в некотором целом расширении кольца $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})$. Классы $\mathrm{x}_i(E)$ называются корнями Чженя расслоения E.

Упражнение 8.12. **(1)** Докажите, что многочлен Чженя $\mathrm{c}_t(E) = 1 + \mathrm{c}_1(E)t + \dots + \mathrm{c}_r(E)t^r$ раскладывается в произведение $\mathrm{c}_t(E) = \prod_{i=1}^r(1+\mathrm{x}_i(E)t)$. **(2)** Докажите, что корни Чженя не зависят (по модулю перестановки) от выбора многообразия Y и фильтрации $E_\bullet$. **(3)** Покажите, что $\mathrm{c}_i(E) = \sigma_i(\mathrm{x}_1(E),\dots,\mathrm{x}_r(E))$, где σ_i — элементарный симметрический многочлен степени i. **(4)** Докажите, что $\mathrm{c}_i(E^*) = (-1)^i\,\mathrm{c}_i(E)$. **(5)** Выразите $\mathrm{c}_i(\Lambda^p(E))$ через $\mathrm{c}_i(E)$. **(6)** Докажите, что $\mathrm{c}_1(\det E) = \mathrm{c}_1(E)$. **(7)** Докажите, что c_1 аддитивен в точных последовательностях. **(8)** Проверьте, что на проективом пространстве $\mathrm{c}_1(E) = \deg(E)\,\mathrm{h}$.

8.7. Равномерные расслоения малого ранга.

Теорема 8.13. *Пусть E — равномерное расслоение на $\mathbb{P}^n$ и $r = r(E) < n$. Тогда E расщепимо.*

Доказательство: Воспользуемся индукцией по $r(E)$. При $r = 1$ доказывать нечего. Допустим $r > 1$. Пусть E имеет тип расщепления $a^E = (a_1, \dots, a_r)$. Подкручивая E можно считать, что $a_1 = 0$. Заметим, что если $a^E = (0, \dots, 0)$, то по теореме 7.10 имеем $E \cong \mathcal{O}^{\oplus r}$ и все доказано. Поэтому можно считать, что $a_1 = \dots = a_s = 0$, $a_{s+1} < 0$, где $1 \le s \le r - 1$.

Воспользуемся стандартной диаграммой. Рассмотрим расслоение p^*E на многообразии $\mathbb{F}_n$. Ясно, что для всякой точки $L \in \mathbb{G}_n$ имеем

$$(p^*E)_{|q^{-1}(\{L\})} = (p^*E)_{|\widetilde{L}} = p^*(E_{|L}) = p^*(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_L(a_i)) = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_i).$$

Далее

$$\dim \mathrm{H}^0(\widetilde{L}, (p^*E)_{|\widetilde{L}}) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)) = s,$$

значит мы можем использовать теорему о замене базы по отношению к расслоению q^*E и морфизму q. Из теоремы следует, что $F = q_*p^*E$ является расслоением на $\mathbb{G}_n$, причем $F_{|\{L\}} = \mathrm{H}^0(f^{-1}(\{L\}), p^*E)$. Отсюда следует, что каноническое отображение $q^*F \to p^*E$ является вложением на каждой прямой $\widetilde{L}$, то есть q^*F является подрасслоением в p^*E. Пусть $G = p^*E/q^*F$. Заметим, что по определению для любой прямой L имеем

$$(q^*F)_{|\widetilde{L}} = \mathcal{O}^{\oplus s}, \qquad G_{|\widetilde{L}} = \oplus_{i=s+1}^r \mathcal{O}(a_i). \tag{8.14}$$

Ограничивая точную последовательность

$$0 \to q^*F \to p^*E \to G \to 0$$

на произвольный слой $\mathbb{F}(x) = p^{-1}(x)$ получаем

$$0 \to (q^*F)_{|\mathbb{F}(x)} \to \mathcal{O}^{\oplus r} \to G_{|\mathbb{F}(x)} \to 0. \tag{8.15}$$

Следовательно, по теореме Уитни

$$\mathrm{c}((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)}) \cdot \mathrm{c}(G_{|\mathbb{F}(x)}) = \mathrm{c}(\mathcal{O}^{\oplus r}) = 1.$$

Так как $\mathbb{F}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, то $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{F}(x), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mathrm{h}]/\,\mathrm{h}^n$. Значит $\mathrm{c}((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)})$ и $\mathrm{c}(G_{|\mathbb{F}(x)})$ являются многочленами от h степени s и $r-s$ соответственно. Их произведение имеет степень не выше r и равно 1 по модулю h^n, следовательно (так как $r < n$) оно равно 1 в кольце $\mathbb{Z}[\mathrm{h}]$, следовательно $\mathrm{c}((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)}) = \mathrm{c}(G_{|\mathbb{F}(x)}) = 1$. Следовательно $\mathrm{c}_1((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)}) = \mathrm{c}_1(G_{|\mathbb{F}(x)}) = 0$. Однако, из (8.15) следует, что расслоение $G_{|\mathbb{F}(x)}$ порождается глобальными сечениями, следовательно по теореме 7.11 имеем $G_{|\mathbb{F}(x)} \cong \mathcal{O}^{\oplus(r-s)}$. Аналогично $(q^*F)_{|\mathbb{F}(x)} \cong \mathcal{O}^{\oplus s}$.

Пользуясь теперь теоремой о замене базы легко показать, что $q^*F = p^*F'$, $G = p^*G'$ для некоторых расслоений F' и G' на $\mathbb{P}^n$, причем имеется точная последовательность

$$0 \to F' \to E \to G' \to 0.$$

Из формулы (8.14) следует, что F' и G' являются равномерными расслоениями, следовательно по предположению индукции они расщепимы, значит $F' = \mathcal{O}^{\oplus s}$, $G' = \oplus_{i=s+1}^r \mathcal{O}(a_i)$. Остается заметить, что

$$\mathrm{Ext}^1(G', F') = \oplus_{i=s+1}^r \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-a_i)) \otimes \mathbb{C}^s = 0$$

(по теореме Ботта), следовательно точная последовательность расщепима, то есть $E = F' \oplus G' = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$. $\square$

9. Простые расслоения.

9.1. **Еще о классах Чженя.** Глобальное сечение s расслоения E на многообразии X называется регулярным, если $\operatorname{codim}\{s=0\} = r(E)$.

Теорема 9.1. *Если $s \in \Gamma(X, E)$ — регулярное сечение, то $[\{s=0\}] = \mathrm{c}_r(E)$.*

Доказательство: Воспользуемся теоремой 8.11. Пусть $p : Y \to X$ и $E_i \subset p^*E$ — соответствующие многообразие и фильтрация. Пусть далее $L_i = E_i/E_{i-1}$. Определим последовательность подмногообразий $Y_i \subset Y$ и сечений $s_i \in \Gamma(Y_i, (E_i)_{|Y_i})$ следующим образом. Положим $Y_r = Y$, $s_r = p^*s$. Далее, допустим пара (Y_i, s_i) построена. Пусть $s_i' \in \Gamma(Y_i, (L_i)_{|Y_i})$ — образ сечения s_i. Положим $Y_{i-1} = \{s_i' = 0\} \subset Y_i$. Тогда ограничение $s_{i|Y_{i-1}} \in \Gamma(Y_{i-1}, (E_i)_{|Y_{i-1}})$ при отображении в $\Gamma(Y_i, (L_i)_{|Y_{i-1}})$ переходит в ноль, следовательно оно приходит из некоторого сечения $s_{i-1} \in \Gamma(Y_{i-1}, (E_{i-1})_{|Y_{i-1}})$.

Легко проверить, что $Y_0 = \{p^*s = 0\}$, следовательно $[Y_0] = p^*[\{s=0\}]$. С другой стороны, очевидно что $[Y_{i-1}] = [Y_i] \cdot \mathrm{c}_1(L_i)$, следовательно $[Y_0] = \prod_{i=1}^r \mathrm{c}_1(L_i)$. Однако по формуле Уитни имеем $\mathrm{c}_r(p^*E) = \prod_{i=1}^r \mathrm{c}_1(L_i)$, следовательно $p^*\,\mathrm{c}_r(E) = p^*[\{s=0\}]$ и остается применить тот факт, что p^* является вложением на когомологиях. □

9.2. **Характер Чженя.** Пусть $\mathrm{x}_i(E)$ — корни Чженя расслоения E. Определим характер Чженя расслоения E следующей формулой

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^r \exp(\mathrm{x}_i(E)),$$

где $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$. Заметим, что корни Чженя лежат во второй градуировочной компоненте кольца когомологий, поэтому выражение $\exp(\mathrm{x}_i(E))$ корректно определено. Более того, ясно, что

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\sum_{i=1}^r \mathrm{x}_i(E)^k}{k!}.$$

Суммы k-х степеней корней Чженя будучи симметрическими многочленами от $\mathrm{x}_i(E)$ полиномиально выражаются через элементарные симметрические многочлены и, следовательно лежат в $\mathrm{H}^{2k}(X, \mathbb{Z})$. Значит $\mathrm{ch}(E) \in \mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{Q})$. Обозначим через $\mathrm{ch}_i(E)$ компоненту $\mathrm{ch}(E)$ в $\mathrm{H}^{2i}(E)$.

Следующие свойства характера Чженя $\mathrm{ch}(E)$ делают его особенно удобным при вычислениях.

Теорема 9.2. *Характер Чженя одновременно аддитивен и мультипликативен, то есть для всякой точной последовательности векторных расслоений $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ имеем $\mathrm{ch}(E_2) = \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_3)$, а для всякой пары расслоений E и E' имеем $\mathrm{ch}(E \otimes E') = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(E')$.*

Доказательство: Легко следует из принципа расщепления и свойств экспоненты. □

Упражнение 9.3. Докажите, что

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathrm{ch}_0(E) & = & r(E), & \mathrm{ch}_2(E) & = & (\mathrm{c}_1(E)^2 - 2\,\mathrm{c}_2(E))/2, \\
\mathrm{ch}_1(E) & = & \mathrm{c}_1(E), & \mathrm{c}_2(E) & = & (\mathrm{ch}_1(E) - 2\,\mathrm{ch}_2(E))/2.
\end{array}$$

Аддитивность характера Чженя позволяет определить его не только для векторных расслоений, но я для любых когерентных пучков. А именно, если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, то положим $\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \mathrm{ch}(E_i)$, где

$$0 \to E_m \to E_{m-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

локально свободная резольвента пучка $\mathcal{F}$.

Упражнение 9.4. **(1)** Проверьте, что определение $\mathrm{ch}(\mathcal{F})$ не зависит от выбора локально свободной резольвенты. **(2)** Пусть $i : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ — линейное вложение. Вычислите $\mathrm{ch}(i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(k))$. **(3)** Покажите, что $\mathrm{c}_1(E) = 0$, $\mathrm{c}_2(E) = m$, где E — расслоение, построенное в разделе 4.5.

9.3. **Простые расслоения.** Обозначим $\mathrm{Hom}(E, E)$ через $\mathrm{End}(E)$. Ясно, что $\mathrm{End}(E)$ — кольцо. Тождественный гомоморфизм $\mathrm{id}_E : E \to E$ очевидно является единицей в кольце эндоморфизмов, тем самым $\mathrm{End}(E) \supset \mathbb{C}$ для любого расслоения E.

Определение. Расслоение E называется простым, если оно не имеет нетривиальных эндоморфизмов, то есть если $\mathrm{End}(E) = \mathbb{C}$.

Легко видеть, что

$$\mathrm{End}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{End}(E_1) \oplus \mathrm{End}(E_2) \oplus \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \oplus \mathrm{Hom}(E_2, E_1),$$

следовательно $\dim \mathrm{End}(E_1 \oplus E_2) \geq 2$, тем самым всякое простое расслоение неразложимо. Это дает удобный когомологический критерий неразложимости.

Теорема 9.5. *Расслоение $T_{\mathbb{P}(V)}$ — простое.*

Доказательство: Ясно, что $\mathrm{End}(T) = \mathrm{Hom}(T, T) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), \Omega \otimes T)$. Умножая последовательность Эйлера на Ω получаем

$$0 \to \Omega \to V \otimes \Omega(1) \to \Omega \otimes T \to 0.$$

Однако по Упр. 7.8 имеем $H^\bullet(\mathbb{P}(V), \Omega(1)) = 0$, поэтому $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), \Omega \otimes T) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}(V), \Omega)$. С другой стороны, дуализируя последовательность Эйлера получаем

$$0 \to \Omega \to V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0,$$

и так как $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(-1)) = 0$, то $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(V), \Omega) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. Тем самым мы доказали, что $\mathrm{End}(T) = \mathbb{C}$. $\square$

Упражнение 9.6. **(1)** Докажите, что линейное расслоение на связном проективном многообразии просто. **(2)** Докажите, что расслоение E просто тогда и только тогда, когда E^* просто. **(3)** Пусть L — линейное расслоение. Проверьте, что E просто тогда и только тогда, когда $E \otimes L$ просто.

Из Упражнения следует что все подкрутки расслоений T и Ω на проективном пространстве просты. Следующая лемма дает критерий того, что расслоение не является простым.

Лемма 9.7. *Пусть E — расслоение, причем $r(E) \geq 2$. Если $\Gamma(X, E) \neq 0$, $\Gamma(X, E^*) \neq 0$, то E не является простым.*

Доказательство: Ясно, что
$$\Gamma(X,E)=\mathrm{Hom}(\mathcal{O},E),\qquad \Gamma(X,E^*)=\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}).$$
Пусть s, s' — нетривиальные сечения расслоений E и E^*. Тогда композиция $E\xrightarrow{s'}\mathcal{O}\xrightarrow{s}E$ является эндоморфизмом расслоения E, который в слое над общей точкой многообразия X имеет ранг 1, и следовательно не пропорционален тождественному эндоморфизму. $\square$

Из этой леммы легко показать, что расслоение E из раздела 4.5 не является простым. Действительно, пользуясь точной последовательностью (4.9), определяющей расслоение E, получаем $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2,E)\neq 0$. С другой стороны, согласно Упр. 9.4 (3) имеем $\mathrm{c}_1(E)=0$, следовательно $\det E=\mathcal{O}$, значит $E^*\cong E\otimes(\det E)^*\cong E$, то есть $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2,E^*)\neq 0$. Таким образом, условия леммы выполнены, значит E не просто.

Тем самым, расслоение E является примером не простого, но неразложимого расслоения.

Упражнение 9.8. Докажите, что для любых $0\le p\le n$ и $k\in\mathbb{Z}$ расслоение $\Lambda^pT(k)$ просто.

Согласно Упражнению есть довольно много примеров простых расслоений большого ранга. Построение же простых расслоений малого ранга — наоборот, весьма сложная задача. Мы приведем два примера простых расслоений ранга $n-1$ на $\mathbb{P}^n$. Первый пример — расслоение нулевой корреляции — попроще, однако работает только для нечетномерного проективного пространства. Второй пример — так называемый пример Танго — существует уже на любом проективном пространстве.

9.4. **Расслоение нулевой корреляции.** Пусть n — нечетно, а V — $(n+1)$-мерной векторное пространство. Так как V четномерно, то на V существуют невырожденные кососимметрические формы. Выберем одну такую форму $A\in\Lambda^2V^*$. Форма A индуцирует гомоморфизм расслоений $V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{A}V^*\otimes\mathcal{O}$. Из того, что для любого вектора $v\in V$ выполнено $A(v,v)=0$ следует, что композиция
$$\mathcal{O}(-1)\to V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{A}V^*\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}(1)$$
равна нулю. Следовательно A индуцирует морфизм
$$T(-1)=(V\otimes\mathcal{O})/\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}(1).$$
Далее, так как $A:V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{A}V^*\otimes\mathcal{O}$ — изоморфизм, а проекция $V^*\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}(1)$ сюрьективна, то индуцированный морфизм $T(-1)\to\mathcal{O}(1)$ также сюрьективен. Обозначим через N его ядро. По построению N является расслоением ранга $n-1$ на $\mathbb{P}^n$. Расслоение N называется расслоением нулевой корреляции.

Теорема 9.9. *Расслоение нулевой корреляции N является простым расслоением на $\mathbb{P}^n$ с классом Чженя $\mathrm{c}(N)=1+\mathrm{h}^2+\mathrm{h}^4+\dots+\mathrm{h}^{n-1}$.*

Доказательство: Применяя к точной последовательности
$$0\to N\to T(-1)\to\mathcal{O}(1)\to 0 \tag{9.10}$$
функтор $\mathrm{Hom}(N,-)$ получаем точную последовательность
$$0\to\mathrm{Hom}(N,N)\to\mathrm{Hom}(N,T(-1))\to\dots,$$

следовательно $\mathrm{Hom}(N,N) \subset \mathrm{Hom}(N,T(-1))$. Применяя теперь к последовательности (9.10) функтор $\mathrm{Hom}(-,T(-1))$ получаем

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(1),T(-1)) \to \mathrm{Hom}(T(-1),T(-1)) \to \\ \to \mathrm{Hom}(N,T(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1),T(-1)) \to \dots$$

Применяя к последовательности Эйлера функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(2),-)$ получаем, что при $n>1$ $\mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}(1),T(-1)) = \mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}^n,T(-2)) = \mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{O}(2),T) = 0$, следовательно $\mathrm{Hom}(N,T(-1)) = \mathrm{Hom}(T(-1),T(-1)) = \mathrm{End}(T(-1))$. Однако расслоение $T(-1)$ простое, следовательно $\mathrm{Hom}(N,N) \subset \mathrm{Hom}(N,T(-1)) = \mathbb{C}$, значит N — тоже простое.

Остается вычислить класс Чженя. Для этого сначала из точной последовательности Эйлера, подкрученной на $\mathcal{O}(-1)$ получаем

$$\mathrm{c}(T(-1)) = \mathrm{c}(V\otimes\mathcal{O})/\,\mathrm{c}(\mathcal{O}(-1)) = 1/(1-\mathrm{h}).$$

Затем из точной последовательности (9.10) получаем

$$\mathrm{c}(N) = \mathrm{c}(T(-1))/\,\mathrm{c}(\mathcal{O}(1)) = 1/((1-\mathrm{h})(1+\mathrm{h})) = 1+\mathrm{h}^2+\mathrm{h}^4+\dots+\mathrm{h}^{n-1}\,.$$

□

9.5. **Пример Танго.** Прежде чем приступить непосредственно к конструкции расслоения Танго, докажем две полезные леммы.

Лемма 9.11. *Если E расслоение ранга r на многообразии X размерности n, порожденное глобальными сечениями, то E содержит тривиальное подрасслоение ранга $r-n$.*

Доказательство: Пусть $K = \mathrm{H}^0(X,E)$, $\dim K = m$. Рассмотрим многообразие

$$Y = \{(s,x)\in\mathbb{P}(K)\times X \mid s(x)=0\} \subset \mathbb{P}(K)\times X.$$

Ясно, что $Y = \mathbb{P}_X(E')$, где $E' = \mathrm{Ker}(K\otimes\mathcal{O}_X \to E)$. Значит

$$\dim Y = \dim X + r(E') - 1 = n + (m-r) - 1.$$

Пусть $p : Y \to \mathbb{P}(K)$ — проекция на $\mathbb{P}(K)$. Тогда

$$\operatorname{codim} p(Y) \ge (m-1) - \dim Y = (m-1) - (n+m-r-1) = r-n.$$

Выберем $(r-n)$-мерное подпространство $W\subset K$, так что $\mathbb{P}(W)\cap p(Y) = \emptyset$. Но тогда композиция $W\otimes\mathcal{O} \to K\otimes\mathcal{O} \to E$ будет вложением расслоений, что и требовалось. □

Лемма 9.12. *Если E расслоение ранга r на проективном n-мерном многообразии X, порожденное глобальными сечениями, и $\mathrm{c}_r(E) = 0$, то E содержит тривиальное подрасслоение ранга 1.*

Доказательство: Согласно лемме 9.11 достаточно рассмотреть случай $r\le n$. Докажем, что расслоение E не может иметь регулярного сечения. Действительно, если бы E имело регулярное сечение s, то по теореме 9.1 мы имели бы $[\{s=0\}] = \mathrm{c}_r(E) = 0$, а класс когомологий непустого подмногообразия в проективном многообразии всегда отличен от нуля.

Воспользуемся обозначениями, введенными в доказательстве леммы 9.11. Рассмотрим отображение $p : Y \to \mathbb{P}(K)$. Допустим p — сюрьективно. Тогда для общего $s \in \mathbb{P}(K)$ имеем

$$\dim\{x \mid s(x) = 0\} = \dim p^{-1}(s) = \dim Y - \dim \mathbb{P}(K) = \\ = (n + m - r - 1) - (m - 1) = n - r,$$

то есть $\{x \mid s(x) = 0\} \subset X$ — непустое подмногообразие коразмерности r. Это означает, что s — регулярное сечение, что противоречит доказанному выше. Таким образом p не сюрьективно. Возьмем теперь произвольное $s \in \mathbb{P}(K) \setminus p(Y)$. Ясно, что такое s задаст вложение расслоений $\mathcal{O} \to E$, что и требовалось. □

Перейдем теперь к построению примера Танго. Рассмотрим внешний квадрат последовательности Эйлера, подкрученной на $\mathcal{O}(-1)$. Это точная последовательность расслоений

$$0 \to T(-2) \to \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O} \to \Lambda^2 T(-2) \to 0. \tag{9.13}$$

Из послеовательности Эйлера, подкрученной на $\mathcal{O}(-2)$ следует, что $\mathrm{c}(T(-2)) = (1 - \mathrm{h})^{n+1}/(1 - 2\,\mathrm{h})$, а из последовательности (9.13) следует

$$\mathrm{c}(\Lambda^2 T(-2)) = 1/\,\mathrm{c}(T(-2)) = (1 - 2\,\mathrm{h})/(1 - \mathrm{h})^{n+1}.$$

Раскладывая знаменатель в степенной ряд легко вычислить

$$\mathrm{c}_n(\Lambda^2 T(-2)) = \tbinom{2n}{n} - 2\tbinom{2n-1}{n-1} = 0.$$

Пусть $r = n(n-1)/2 = r(\Lambda^2 T(-2))$. Последовательное применение к расслоению $\Lambda^2 T(-2)$ лемм 9.11 и 9.12, доказывет, что $\Lambda^2 T(-2)$ содержит тривиальное подрасслоение ранга $r - n + 1$. Выбирая такое подрасслоение мы получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}^{\oplus(r-n+1)} \to \Lambda^2 T(-2) \to F \to 0. \tag{9.14}$$

Здесь F — расслоение ранга $n - 1$ с $\mathrm{c}(F) = (1 - 2\,\mathrm{h})/(1 - \mathrm{h})^{n+1}$. Расслоение F называется расслоением Танго.

Теорема 9.15. *Расслоение Танго F является простым расслоением на $\mathbb{P}^n$ с классом Чженя $\mathrm{c}(F) = (1 - 2\,\mathrm{h})/(1 - \mathrm{h})^{n+1}$.*

Доказательство: Класс Чженя мы уже вычислили, поэтому надо доказать только простоту. Применяя $\mathrm{Hom}(\,-\,, F)$ к (9.14) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(F, F) \to \mathrm{Hom}(F, \Lambda^2 T(-2)) \to \dots,$$

следовательно $\mathrm{End}(F) \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F)$. Применяя $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), -\,)$ к (9.14) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), \mathcal{O}^{\oplus(r-n+1)}) \to \mathrm{End}(\Lambda^2 T(-2)) \to \\ \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F) \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda^2 T(-2), \mathcal{O}^{\oplus(r-n+1)}) \to \dots$$

Заметим, что по Упр. 7.8 имеем $\mathrm{Ext}^i(\Lambda^2 T(-2), \mathcal{O}) = \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \Lambda^2 \Omega(2)) = 0$, поэтому $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F) = \mathrm{End}(\Lambda^2 T(-2))$. Остается добавить, что по Упр. 9.8 расслоение $\Lambda^2 T(-2)$ — простое, поэтому

$$\mathrm{End}(F) \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T(-2), F) = \mathrm{End}(\Lambda^2 T(-2)) = \mathbb{C},$$

то есть $\mathrm{End}(F) = \mathbb{C}$. □

10. Равномерное неоднородное расслоение.

10.1. **Нормальное расслоение.** Пусть X — гладкое многообразие и $Y \subset X$ — гладкое подмногообразие. Для всякой точки $y \in Y$ касательное пространство T_yY вложено в касательное пространство T_yX. Тем самым имеется вложение расслоений $T_Y \subset T_{X|Y}$. Факторраслоение называется нормальным расслоением и обозначается $\mathcal{N}_{Y/X}$. Таким образом, по определению имеется точная последовательность

$$0 \to T_Y \to T_{X|Y} \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0.$$

Эта последовательность очень полезна в связи с тем, что нормальное расслоение часто легко описать.

Упражнение 10.1. Пусть $U_\bullet$ — покрытие подмногообразия $Y \subset X$. Пусть $z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}$ — координаты в U_i, такие что $Y \cap U_i = \{z_1^{(i)} = \dots = z_r^{(i)} = 0\}$. Докажите, что матрицы $g_{ij} \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_Y(Y \cap U_i \cap U_j))$ с матричными элементами $(g_{ij})_{pq} = (\partial z_p^{(i)}/\partial z_q^{(j)})_{|Y}$ определяют коцикл нормального расслоения $\mathcal{N}_{Y/X}$.

Теорема 10.2. *Пусть $Y = \{s = 0\}$ — множество нулей регулярного сечения расслоения E. Тогда $\mathcal{N}_{Y/X} = E_{|Y}$.*

Доказательство: Нам надо построить сюрьективный гомоморфизм $T_{X|Y} \to E_{|Y}$. Сделаем это так. Возьмем произвольное сечение ξ пучка $T_{X|Y}$. Затем поднимем его (локально) до сечения пучка $\tilde{\xi} \in T_X(U)$. Выберем локальную тривиализацию расслоения $E(U) \cong \mathcal{O}_X(U)^r$ и разложим сечение s по базису сечений $s = (f_1, \dots, f_r)$. Вычислим производную сечения s вдоль векторного поля $\tilde{\xi}$:

$$\tilde{\xi}(s) = (\tilde{\xi}(f_1), \dots, \tilde{\xi}(f_r)).$$

И, наконец, ограничим сечение $\tilde{\xi}(s)$ на Y. Таким образом определяется отображение из сечений пучка $T_{X|Y}$ в сечения пучка $E_{|Y}$. Обозначим построенный морфизм через $\mathrm{d}s$.

Теперь мы должны показать, что отображение $\mathrm{d}s$ не зависит от произвола, допущенного при его построении, и что оно является гомоморфизм $\mathcal{O}_X(U)$-модулей. Затем надо проверить, что полученная последовательность

$$0 \to T_Y \to T_{X|Y} \xrightarrow{\mathrm{d}s} E_{|Y} \to 0 \tag{10.3}$$

точна. Прежде чем все это проверять, докажем лемму.

Лемма 10.4. *Если $\bar{\xi}$ — векторное поле на X, которое касается подмногообразия Y, то $\bar{\xi}(s)_{|Y} = 0$.*

Доказательство: Действительно, $s_{|Y} = 0$, поэтому $\bar{\xi}(s)_{|Y} = (\bar{\xi}_{|Y})(s_{|Y}) = 0$. □

Пусть теперь $\tilde{\xi}'$ — другое поднятие ξ. Тогда ясно, что векторное поле $\bar{\xi} = \tilde{\xi}' - \tilde{\xi}$ равно нулю на Y. В частности, оно касается Y, поэтому по лемме 10.4 имеем $\bar{\xi}(s)_{|Y} = 0$, следовательно $\tilde{\xi}'(s)_{|Y} = \tilde{\xi}(s)_{|Y}$.

Допустим теперь, что мы заменили тривиализацию расслоения E. Пусть $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X(U))$ — матрица замены базиса. Пусть $(f'_1, \dots, f'_r)$ — разложение сечения s относительно нового базиса. Тогда

$$f'_i = \sum_{j=1}^{r} g_{ij} f_j \qquad \forall 1 \le i \le r.$$

Применяя $\tilde{\xi}(-)$ и пользуясь правилом Лейбница получаем

$$\tilde{\xi}(f_i') = \sum_{j=1}^{r} g_{ij}\tilde{\xi}(f_j) + \sum_{j=1}^{r} f_j\tilde{\xi}(g_{ij}).$$

Заметим, что второе слагаемое при ограничении на Y зануляется. Это значит, что набор $(\tilde{\xi}(f_1'), \dots, \tilde{\xi}(f_r'))_{|Y}$ отличается от набора $(\tilde{\xi}(f_1), \dots, \tilde{\xi}(f_r))_{|Y}$ умножением на матрицу g, следовательно задает то же сечение расслоения $E_{|Y}$.

Тот факт, что $\mathrm{d}s$ является гомоморфизмом $\mathcal{O}_X(U)$-модулей легко следует из того, что производная функции вдоль векторного поля коммутирует с умножением векторного поля на функции.

Пусть теперь ξ — сечение пучка T_Y. Тогда его поднятие $\tilde{\xi}$ будет касаться подмногообразия Y, следовательно по лемме 10.4 получим $\tilde{\xi}(s)_{|Y} = 0$. Значит T_Y содержится в ядре построенного морфизма.

Остается доказать точность последовательности (10.3). Это можно делать локально. Выберем (аналитически) локальную систему координат $z_1, \dots, z_n$, так чтобы подмногообразие Y задавалось бы уравнениями $z_1 = \dots = z_r = 0$. Ясно, что отображение $\mathrm{d}s$ переводит сечение $\sum_{i=1}^n \phi_i \partial_{z_i} \in T_{X|Y}(U)$ в сечение

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i \partial_{z_i}(z_1), \dots, \sum_{i=1}^{n} \phi_i \partial_{z_i}(z_r)\right) = (\phi_1, \dots, \phi_r) \in E_{|Y}(U).$$

Отсюда сразу следует, что $\mathrm{d}s$ сюрьективно, и что

$$\operatorname{Ker} \mathrm{d}s = \left\langle \sum_{i=r+1}^{n} \phi_i \partial_{z_i} \right\rangle = T_Y(U).$$

На этом доказательство теоремы заканчивается. □

Пример 10.5. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ — проективное пространство, а $Y = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$. Ясно, что $Y = \{s = 0\}$, где

$$s \in \Gamma(\mathbb{P}(V), V/W \otimes \mathcal{O}(1)) = V/W \otimes V^* = \operatorname{Hom}(V, V/W)$$

сечение, соответствующее проекции $V \to V/W$. Отсюда получаем

$$\mathcal{N}_{\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(V)} = V/W \otimes \mathcal{O}(1).$$

Упражнение 10.6. Пусть $\omega_X = \det \Omega_X$ — каноническое линейное расслоение на многообразии X. Пусть $Y = \{s = 0\} \subset X$, где $s \in \Gamma(X, E)$ — регулярное сечение. Докажите формулу присоединения:

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes \det E)_{|Y}.$$

10.2. **Степень однородности.** Прежде чем приступить к конструкции введем полезные определения.

Определение. Расслоение E на пространстве $\mathbb{P}^n$ называется k-однородным, если для любых линейных вложений $\phi_{1,2} : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^n$ имеем $\phi_1^* E \cong \phi_2^* E$.

Очевидно, что расслоение E равномерно тогда и только тогда, когда оно 1-однородно. Кроме того, ясно, что всякое однородное расслоение является n-однородным.

Замечание. Определения однородности и n-однородности вообще говоря не эквивалентны. В определении однородности требуется выбор конкретного изоорфизма, причем так, чтобы изоморфизмы были некоторым образом согласованы.

Ясно, что если расслоение k-однородно, то оно и $(k-1)$-однородно. Назовем степенью однородности расслоения E число $h(E) = \max\{k \mid E$ — k-однородно$\}$.

Упражнение 10.7. Покажите, что если $r(E) < n$, то $h(E)$ равно 0 или n.

Нашей целью будет построение расслоения E с $h(E) = 1$. Такое расслоение автоматически будет равномерным, но неоднородным.

10.3. **Конструкция расслоения.** Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Возьмем произвольное $1 \le m \le n-1$. Выберем $(m+1)$-мерное подпространство $W_0 \subset V$. Из точной последовательности Эйлера следует, что $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), T(-1)) = V$, поэтому вложение $W_0 \subset V$ дает сечение расслоения $W_0^* \otimes T(-1)$ или, иначе говоря, морфизм $f : \mathcal{O} \to W_0^* \otimes T(-1)$.

Лемма 10.8. *При* $\dim W_0 \ge 2$ *морфизм* f *является вложением расслоений.*

Доказательство: Возьмем произвольную точку $v \in \mathbb{P}(V)$. Нам надо проверить, что f не обращается в нуль в точке v. Однако ясно, что значение f в точке v — это композиция $W_0 \to V \to V/v$, рассматриваемая как вектор в пространстве $W_0^* \otimes V/v = W_0^* \otimes T(-1)_v$. Но при $\dim W_0 \ge 2$ такая композиция не равна тождественно нулю, что и требовалось. □

Из доказанной леммы следует, что факторпучок E локально свободен. Таким образом, мы получаем точную последовательность расслоений

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{f} W_0^* \otimes T(-1) \to E \to 0. \tag{10.9}$$

Выберем произвольное подпространство $W \subset V$. Изучим ограничения расслоения E на $\mathbb{P}(W)$. Тут возможны два случая: $W_0 \subset W$ и $W_0 \not\subset W$.

Лемма 10.10. *Если* $W_0 \not\subset W$, $\dim W = k+1$, *то*

$$E_{|\mathbb{P}(W)} \cong \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1} \oplus W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(W)}(-1).$$

В этом случае $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to T_{\mathbb{P}(W)} \to T_{\mathbb{P}(V)|\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{N}_{\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(V)} \to 0.$$

Домножим ее на W_0^*, подкрутим на $\mathcal{O}(-1)$ и воспользуемся изоморфизмом $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(V)} \cong V/W \otimes \mathcal{O}(1)$. Получится последовательность

$$0 \to W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} \to W_0^* \otimes V/W \otimes \mathcal{O} \to 0. \tag{10.11}$$

Заметим, что композиция морфизма $f_{|\mathbb{P}(W)}$ и проекции $W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} \to W_0^* \otimes V/W \otimes \mathcal{O}$ — это морфизм $f' : \mathcal{O} \to W_0^* \otimes V/W \otimes \mathcal{O}$, заданный вектором в пространстве $W_0^* \otimes V/W$, соответствующим отображению $W_0 \to V \to V/W$. При $W_0 \not\subset W$ этот вектор не равен нулю, поэтому f' не равен нулю. Поэтому последовательность (10.11) вместе с последовательностью (10.9), ограниченной на $\mathbb{P}(W)$, дают коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)} \arrow[r, equal] \arrow[d] & W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & W_0^*\otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d] & E_{|\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, "f'"] & W_0^*\otimes V/W\otimes\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Правый столбец диаграммы показывает, что расслоение $E_{|\mathbb{P}(W)}$ является расширением расслоения $\mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}$ с помощью расслоения $W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}$. Однако, $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), T(-1)_{\mathbb{P}(W)}) = 0$, поэтому

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}, W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}) = 0,$$

следовательно $E_{|\mathbb{P}(W)} \cong \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}\oplus W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}$. Остается заметить, что $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}\oplus W_0^*\otimes\Omega(1)_{\mathbb{P}(W)}) = 0.$ $\square$

Лемма 10.12. *Если* $W_0\subset W$, $\dim W = k+1$, *то* $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = \mathbb{C}$.

Доказательство: Будем делать то же самое, что и при доказательстве предыдущей леммы. Первое различие возникнет при вычислении морфизма f'. На этот раз $W_0\subset W$, поэтому композиция $W_0\to V\to V/W$ равна нулю, значит $f' = 0$. Это означает, что морфизм $f : \mathcal{O}\to W_0^*\otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)}$ можно поднять до морфизма $f'' : \mathcal{O}\to W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}$. Соответственно, последовательность (10.11) вместе с последовательностью (10.9), ограниченной на $\mathbb{P}(W)$, дают следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, "f''"] \arrow[d, equal] & W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, "f"] & W_0^*\otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d] & E_{|\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & W_0^*\otimes V/W\otimes\mathcal{O} \arrow[r, equal] \arrow[d] & W_0^*\otimes V/W\otimes\mathcal{O} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Дуализируя правый столбец диаграммы получаем

$$0 \to W_0 \otimes (V/W)^* \otimes \mathcal{O} \to E^*_{|\mathbb{P}(W)} \to F^* \to 0.$$

Применяя функтор $\Gamma(\mathbb{P}(W), -)$ и пользуясь тем, что $\mathrm{H}^{>0}(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}) = 0$, получаем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), F^*).$$

Дуализируя верхнюю строчку диаграммы получаем

$$0 \to F^* \to W_0 \otimes \Omega(1)_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O} \to 0.$$

Применяя функтор $\Gamma(\mathbb{P}(W), -)$ и пользуясь тем, что $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}(W), \Omega(1)) = 0$, получаем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), F^*) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}) = \mathbb{C}.$$

и лемма следует. $\square$

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 10.13. *Если $n \geq 2$, а $1 \leq m \leq n-1$, то степень однородности $h(E)$ расслоения E равна $m-1$.*

Доказательство: Нам надо показать, что при $\dim W \leq m$ класс изоморфизма расслоения $E_{|\mathbb{P}(W)}$ зависит только от $\dim W$, а при $\dim W = m+1$ класс изоморфизма расслоения $E_{|\mathbb{P}(W)}$ уже существенно зависит от самого подпространства W.

Первое очевидно следует из леммы 10.10. Действительно, при $\dim W \leq m$ у нас заведомо $W_0 \not\subset W$, поэтому $E_{|\mathbb{P}(W)} \cong \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1} \oplus W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(W)}(-1)$.

Пусть теперь $\dim W = m+1$. Так как $m < n$, то существует подпространство $W \subset V$, такое что $W_0 \not\subset W$. Тогда по лемме 10.10 имеем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = 0,$$

в то время как по лемме 10.12 имеем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W_0), E^*_{|\mathbb{P}(W_0)}) = \mathbb{C}.$$

Тем самым $E_{|\mathbb{P}(W)} \ncong E_{|\mathbb{P}(W_0)}$. $\square$

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что при $n \geq 3$, $m = 2$ мы построили расслоение E ранга $(m+1)n - 1 = 3n - 1$ на $\mathbb{P}^n$, которое имеет степень однородности 1. В частности, оно равномерно, но неоднородно.

11. Расслоения ранга 2.

11.1. Локально полные пересечения.

Определение. Подмногообразие Y коразмерности r называется локально полным пересечением, если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью $y \in U \subset X$, такой что $Y \cap U$ задается набором из r уравнений, то есть если найдутся r функции $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_X(U)$, такие что $Y \cap U = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}$.

Упражнение 11.1. Пусть $Y = \{s = 0\}$, где $s \in \Gamma(X, E)$ — регулярное сечение. Докажите, что Y — локально полное пересечение.

Определение. Подмногообразие Y коразмерности r называется глобально полным пересечением, или просто полным пересечением, если найдутся r линейных расслоений $L_1, \dots, L_r$ и r сечений функции $s_1 \in \Gamma(X, L_1), \dots, s_r \in \mathcal{O}_X(U)$, такие что $Y = \{s_1 = \dots = s_r = 0\}$.

Ясно, что всякое полное пересечение является локально полным пересечением. Обратное, вообще говоря, не верно. Простейший пример — тройка точек в $\mathbb{P}^2$, не лежащих на одной прямой.

Упражнение 11.2. Покажите, что набор из m различных точек плоскости $\mathbb{P}^2$ всегда является локально полным пересечением. Опишите, когда он является глобально полным пересечением.

Теорема 11.3. *Всякое гладкое подмногообразие Y в гладком многообразии X является локально полным пересечением.*

Доказательство: Ограничимся аналитической ситуацией. Здесь все сводится к очевидному утверждению о том, что всякое гладкое подмногообразие коразмерности r в $\mathbb{C}^n$ можно локально задать r уравнениями. ☐

Важнейшим свойством локально полных пересечений является следующая теорема.

Теорема 11.4. *Пусть $i : Y \subset X$ — локально полное пересечение. Тогда*

$$\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \begin{cases} i_* \det \mathcal{N}_{Y/X}, & \text{при } p = \operatorname{codim} Y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Мы докажем теорему в аналитической ситуации. Пусть $\operatorname{codim} Y = r$, $\dim X = n$. Возьмем произвольную точку $y \in Y$ и выберем в окрестности точки y на X аналитические координаты $z_1, \dots, z_n$, так что $Y = \{z_1 = \dots = z_r = 0\}$. Это означает, что Y является множеством нулей сечения $s = (z_1, \dots, z_r)$ тривиального расслоения $W \otimes \mathcal{O}_X$, где $W = \langle z_1, \dots, z_r \rangle$. Следовательно, пучок $i_*\mathcal{O}_Y$ обладает резольвентой Кошуля

$$0 \to \Lambda^r W^* \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \Lambda^{r-1} W^* \otimes \mathcal{O}_X \to \dots \to W^* \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0. \tag{11.5}$$

Применяя функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O})$ получаем комплекс

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} W \otimes \mathcal{O}_X \to \dots \to \Lambda^{r-1} W \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \Lambda^r W \otimes \mathcal{O}_X \to 0, \tag{11.6}$$

когомологии которого равны $\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$. Однако, легко видеть, что комплекс (11.6) изоморфен комплексу (11.5) умноженному на $\det(W \otimes \mathcal{O}_X)$. Поэтому из точности комплекса (11.5) следует, что

$$\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \begin{cases} i_* \det(W \otimes \mathcal{O}_Y), & \text{при } p = r \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Посмотрим теперь, что происходит при замене локальных координат. Пусть $z'_1, \dots, z'_n$ — другие локальные координаты, такие что $Y = \{z'_1 = \dots = z'_r = 0\}$. Пусть $W' = \langle z'_1, \dots, z'_r \rangle$, $s' = (z'_1, \dots, z'_r)$ — сечение расслоения $W' \otimes \mathcal{O}_X$ и

$$0 \to \Lambda^r (W')^* \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \Lambda^{r-1}(W')^* \otimes \mathcal{O}_X \to \dots \to (W')^* \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0 \tag{11.5'}$$

соответствующий комплекс Кошуля. Заметим, что так как $\{z'_1 = \dots = z'_r = 0\} = \{z_1 = \dots = z_r = 0\}$ следует, что существует такая матрица $\phi \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)$, такая что

$$z'_i = \sum_{j=1}^{r} \phi_{ij}(z_1, \dots, z_n) z_j.$$

Рассмотрим ϕ как изоморфизм $W \otimes \mathcal{O}_X \to W' \otimes \mathcal{O}_X$. Легко видеть, что набор $(\Lambda^r \phi^*, \Lambda^{r-1}\phi^*, \dots, \phi^*, 1)$ задает изоморфизм комплекса $(11.5')$ с комплексом (11.5). Поэтому при переходе к новым координатам тривиализация расслоения $i^* \mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ изменяется посредством умножения на $(\det \phi)_{|Y}$.

Заметим теперь, что

$$\partial z'_i / \partial z_j = \phi_{ij} + \sum_{k=1}^{r} (\partial \phi_{ik} / \partial z_j) z_k,$$

следовательно $(\partial z'_i / \partial z_j)_{|Y} = \phi_{ij|Y}$. Это означает, что $(\det \phi)_{|Y}$ совпадает с ограничением на Y якобиана $\det(\partial z'_i / \partial z_j)$, который по Упр. 10.1 является функцией перехода для детерминанта нормального расслоения. Следовательно, расслоения $i^* \mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ и $\det \mathcal{N}_{Y/X}$ задаются одинаковыми коциклами, и значит $\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong i_* \det \mathcal{N}_{Y/X}$. □

11.2. **Конструкция Серра.** Конструкция Серра при выполнении некоторых условий позволяет по локально полному пересечению $Y \subset X$ коразмерности 2 и по продолжению детерминанта нормального расслоения с Y на X строить расслоение ранга 2 на многообразии X с регулярным сечением. Начнем с важной леммы.

Лемма 11.7. *Пусть L линейное расслоение на многообразии X, а $Y \subset X$ — локально полное пересечение коразмерности 2. Если $\mathrm{H}^1(X, L^*) = \mathrm{H}^2(X, L^*) = 0$, то $\mathrm{Ext}^1(J_Y, L^*) = \mathrm{Hom}(L_{|Y}, \det \mathcal{N}_{Y/X})$, причем расширение*

$$0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$$

соответствующее морфизму $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ дает локально свободный пучок F тогда и только тогда, когда f — сюрьекция.

Доказательство: Воспользуемся точной последовательностью из Упр. 5.3:

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{H}om(J_Y, L^*)) \to \mathrm{Ext}^1(J_Y, L^*) \to$$
$$\to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E}xt^1(J_Y, L^*)) \to \mathrm{H}^2(X, \mathcal{H}om(J_Y, L^*)).$$

Применяя функтор $\mathcal{H}om(-,L^*)$ к точной последовательности $0 \to J_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$ и пользуясь тем, что

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_Y, L^*) \cong \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \otimes L^* \cong \begin{cases} L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}, & \text{при } p = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

получаем

$$\mathcal{H}om(J_Y, L^*) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, L^*) \cong L^*,$$
$$\mathcal{E}xt^1(J_Y, L^*) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y, L^*) \cong L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}.$$

Подставляя, получаем последовательность

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, L^*) \to \mathrm{Ext}^1(J_Y, L^*) \to \mathrm{H}^0(X, L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) \to H^2(X, L^*),$$

следовательно

$$\mathrm{Ext}^1(J_Y, L^*) = \mathrm{H}^0(X, L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) =$$
$$= \mathrm{H}^0(Y, L^*_{|Y} \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \mathrm{Hom}(L_{|Y}, \det \mathcal{N}_{Y/X}),$$

тем самым первая часть леммы доказана.

Рассмотрим теперь расширение $0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$, соответствующее морфизму $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$. Как известно, пучок F локально свободен тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}xt^{>0}(F, \mathcal{O}_X) = 0$. Применяя функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X)$ получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \to L \to \det \mathcal{N}_{Y/X} \to \mathcal{E}xt^1(F, \mathcal{O}_X) \to \dots$$

из которой видно, что F локально свободен тогда и только тогда, когда морфизм $L \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ сюрьективен. Однако этот морфизм очевидно раскладывается в композицию $L \to L_{|Y} \xrightarrow{f} \det \mathcal{N}_{Y/X}$ в которой первый морфизм сюрьективен. Окончательно получаем, что F локально свободен тогда и только тогда, когда морфизм $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ сюрьективен, что и требовалось доказать. $\square$

Упражнение 11.8. Покажите, что для любого расширения

$$0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$$

имеем $\det F \cong L^*$.

Теорема 11.9. *Пусть L — линейное расслоение на многообразии X, такое что $\mathrm{H}^1(X, L^*) = \mathrm{H}^2(X, L^*) = 0$. Для всякого локально полного пересечения $Y \subset X$ коразмерности 2, такого что $\det \mathcal{N}_{Y/X} \cong L_{|Y}$, существует пара (E, s), где E — расслоение ранга 2 на X, такое что $\det E \cong L$, а s — регулярное сечение E, так что $Y = \{s = 0\}$. Множество таких пар (E, s) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством изоморфизмов $L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$.*

Доказательство: Допустим (E, s) — искомая пара. Так как $r(E) = 2$ и $\det E \cong L$, то резольвента Кошуля пучка $\mathcal{O}_Y$ имеет вид

$$0 \to L^* \xrightarrow{s} E^* \xrightarrow{s} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

Это означает, что расслоение E^* является расширением пучка идеалов J_Y с помощью L^*. Из леммы 11.7 следует, что всякому сюрьективному гомоморфизму $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ можно сопоставить единственное расширение

$$0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$$

с локально свободным пучком F. Всякому такому расширению можно сопоставить расслоение $E = F^*$ и сечение $s \in \Gamma(X, E)$, двойственное к гомоморфизму $F \to J_Y \to \mathcal{O}_X$. Из Упр. 11.8 следует, что $\det E = L$. Кроме того, по построению сечение s обращается в нуль в точности на подмногообразии Y. Тем самым, пара (E, s) удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Таким образом, множество пар (E, s) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством сюрьекций $L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$. Остается заметить, что всякий сюрьективный гомоморфизм между линейными расслоениями является изоморфизмом. □

Замечание. Домножая комплекс Кошуля пучка $\mathcal{O}_Y$ на L и пользуясь тем, что $E^* \otimes L \cong E^* \otimes \det E \cong E$, получаем точную тройку

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to J_Y \otimes L \to 0.$$

11.3. **Расслоения ранга 2 на проективных пространствах.** В случае $X = \mathbb{P}^n$ теорема Ботта позволяет упростить условия теоремы 11.9.

Теорема 11.10. *Пусть $Y \subset \mathbb{P}^n$ — локально полное пересечение коразмерности 2, такое что $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(k)_{|Y}$. Пусть кроме того, либо $n \geq 3$, либо $n = 2$ и $k \leq 2$. Тогда существует пара (E, s), где E — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, такое что $\det E \cong \mathcal{O}(k)$, а s — регулярное сечение E, так что $Y = \{s = 0\}$. Множество таких пар (E, s) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством изоморфизмов $\mathcal{O}(k)_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$.*

Доказательство: Достаточно заметить, что как при $n \geq 3$, так и при $n = 2$, $k \leq 2$ по теореме Ботта имеем $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-k)) = \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-k)) = 0$. □

Пример 11.11. (1) Пусть $X = \mathbb{P}^2$, $Y = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Всякое расслоение на Y тривиально, поэтому можно взять в качестве расслоения L любое расслоение $\mathcal{O}(k)$ с $k \leq 2$. Применяя теорему 11.10 получаем расслоение E на $\mathbb{P}^2$ и точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0.$$

При $k = 0$ — это расслоение, построенное в разделе 4.5.

(2) Пусть $X = \mathbb{P}^3$, $Y = Y_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup Y_m$, где $Y_1, \ldots, Y_m$ — попарно не пересекающиеся прямые. Так как

$$(\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3})_{|Y_i} = \mathcal{N}_{Y_i/\mathbb{P}^3} = (\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))_{|Y_i},$$

то $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(2)_{|Y}$. Применяя теорему 11.10 получаем расслоение E на $\mathbb{P}^3$ и точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(2) \to 0.$$

(3) Пусть $X = \mathbb{P}^3$, $Y = Y_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup Y_m \subset \mathbb{P}^3$, где $Y_i = \{s_i = s'_i = 0\}$, $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(a_i))$, $s'_i \in \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(a'_i))$, и кривые Y_i попарно не пересекаются. Так как

$$(\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3})_{|Y_i} = \mathcal{N}_{Y_i/\mathbb{P}^3} = (\mathcal{O}(a_i) \oplus \mathcal{O}(a'_i))_{|Y_i},$$

то $(\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3})_{|Y_i} = \mathcal{O}(a_i + a'_i)_{|Y}$. Допустим, что для любого i имеем $a_i + a'_i = k$, где k — фиксировано. Тогда $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(k)_{|Y}$. Применяя теорему 11.10 получаем расслоение E на $\mathbb{P}^3$ и точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0.$$

Упражнение 11.12. Для каждого из расслоений предыдущего примера вычислите классы Чженя и тип расщепления.

11.4. **Полные пересечения и расщепимые расслоения.**

Лемма 11.13. *Если Y — полное пересечение коразмерности 2 в $\mathbb{P}^n$ и $n \geq 3$, то $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$.*

Доказательство: Допустим $Y = \{s_1 = s_2 = 0\}$, где $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a_i))$. Тогда пучок $\mathcal{O}_Y$ имеет резольвенту Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}(-a_1 - a_2) \to \mathcal{O}(-a_1) \oplus \mathcal{O}(-a_2) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

Так как $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-a)) = 0$ при $p \leq 2$, $n \geq 3$ и $a > 0$, то отсюда легко следует, что $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. □

Теорема 11.14. *Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^n$, где $n \geq 3$, построенное по локально полному пересечению Y коразмерности 2. Тогда E расщепимо тогда и только тогда, когда Y является глобально полным пересечением.*

Доказательство: Допустим E — расщепимо, то есть $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$. Тогда $s = (s_1, s_2)$ и $Y = \{s = 0\} = \{s_1 = s_2 = 0\}$, то есть Y — полное пересечение.

Обратно, допустим, что Y — полное пересечение, то есть $Y = \{s_1 = s_2 = 0\}$, где $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a_i))$. Тогда пара $(\mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2), (s_1, s_2))$ является одной из пар, соответствующих подмногообразию Y в смысле теоремы 11.10. Поэтому, если мы докажем, что изоморфизм $\mathcal{O}(a_1 + a_2)_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ единственен (с точностью до умножения на константу), то отсюда по теореме 11.10 будет следовать, что $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$.

Но заметим, что множество таких изоморфизмов совпадает с множеством автоморфизмов расслоения $\det \mathcal{N}_{Y/X}$, но

$$\mathrm{Hom}(\det \mathcal{N}_{Y/X}, \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \mathrm{H}^0(Y, \det \mathcal{N}^*_{Y/X} \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$$

(по лемме 11.13). Значит все автоморфизмы оличаются лишь умножением на константу, и все доказано. □