12. Классификация расслоений.

Общий подход к классификационным задачам состоит в следующем. Сначала выделяются дискретные инварианты классифицируемых объектов, а затем изучаются семейства объектов с фиксированными дискретными инвариантами. Следуя этому, мы будем изучать сегодня дискретные инварианты алгебраических векторных расслоений на проективных пространствах.

12.1. **Условия Шварценбергера.** Наиболее очевидными дискретными инвариантами векторного расслоения E на проеткивном пространстве $\mathbb{P}^n$ является ранг $r(E) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и классы Чженя $\mathrm{c}_i(E) \in \mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ $(1 \leq i \leq r(E))$. Пользуясь отождествлением $\mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\,\mathrm{h}^i \cong \mathbb{Z}$ мы можем рассматривать классы Чженя как целые числа. Возникает вопрос, для всякого ли r и набора целых чисел $(\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_r) \in \mathbb{Z}^r$ найдется расслоение E ранга r с $\mathrm{c}_i(E) = \mathrm{c}_i$. Необходимое условие дает следующая теорема.

Теорема 12.1. *Пусть E — векторное расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n$. Пусть числа $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{C}$ определяются из следующего равенства*

$$1 + \mathrm{c}_1(E)t + \dots + \mathrm{c}_r(E)t^r = \prod_{i=1}^{r}(1 + x_i t).$$

Тогда выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n + x_i + s}{n} \in \mathbb{Z} \qquad \forall s \in \mathbb{Z}, \tag{12.2}$$

где $\binom{z}{n} = z(z-1)\dots(z-n+1)/n!$ *для любого* $z \in \mathbb{C}$.

Условие (12.2) называется условием Шварценбергера S_n^r.

Упражнение 12.3. Покажите, что

условие S_n^1 выполено для любого $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$;
условие S_1^r выполено для любого $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$;
условие S_2^2 выполено для любых $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$;
условие S_3^2 равносильно условию $\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 \equiv 0 \pmod 2$;
условие S_3^3 равносильно условию $\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 \equiv \mathrm{c}_3 \pmod 2$;
условие S_4^2 равносильно условию $\mathrm{c}_2(\mathrm{c}_2 + 1 - 3\,\mathrm{c}_1 - 2\,\mathrm{c}_1^2) \equiv 0 \pmod{12}$.

Прежде чем доказать теорему 12.1 проверим несколько полезных фактов. Обозначим левую часть равенства (12.2) через $S(E, s)$.

Упражнение 12.4. **(1)** Покажите, что $\mathrm{ch}_p(E) = (x_1^p + \dots + x_r^p)/p!$. **(2)** Проверьте, что $S(E, s) = \sum_{p=0}^{n} a_p(s)\,\mathrm{ch}_p(E)$, где $a_p(s)$ — многочлен от s с рациональными коэффициентами, не зависящий от расслоения E. **(3)** Покажите, что $S(E, s) = S(E(s), 0)$.

На самом деле, теорема 12.1 является следствием теоремы Римана-Роха для проективного пространства. Определим эйлерову характеристику пучка E равенством

$$\chi(E) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim \mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E).$$

Упражнение 12.5. **(1)** Проверьте, что $\chi(E)$ аддитивна относительно прямых сумм. **(2)** Проверьте, что $\chi(E)$ аддитивна относительно точных последовательностей.

Теорема 12.6 (Теорема Римана-Роха). *Пусть E — расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n$. Тогда $\chi(E) = S(E, 0)$.*

Доказательство: Сначала докажем теорему для линейных расслоений. Как известно, всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ имеет вид $\mathcal{O}(k)$. Далее из теоремы Ботта следует

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim \mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} \dim \mathbf{S}^k \mathbb{C}^{n+1}, & \text{при } k \geq 0 \\ 0, & \text{при } -n \leq k \leq -1 \\ (-1)^n \dim \mathbf{S}^{-k-n-1}\mathbb{C}^{n+1}, & \text{при } k \leq -n-1 \end{cases}$$

Остается заметить, что во всех случаях это равно $\binom{n+k}{n} = S(\mathcal{O}(k), 0)$. Значит $\chi(E) = S(E, 0)$ для любых линейных расслоений.

Заметим далее, что из Упр. 12.4 (2) следует, что $S(E, 0) = \sum_{p=0}^{n} a_p(0)\,\mathrm{ch}_p(E)$, значит $S(E, 0)$ аддитивно относительно прямых сумм расслоений. С другой стороны, по Упр. 12.5 (1) эйлерова характеристика $\chi(E)$ тоже аддитивна относительно прямых сумм, следовательно $\chi(E) = S(E, 0)$ для прямых сумм линейных расслоений.

Далее, так как характер Чженя аддитивен в точных последовательностях, то из Упр. 12.4 (2) следует, что $S(E, 0)$ аддитивно в точных последовательностях. С другой стороны, по Упр. 12.5 (2) эйлерова характеристика $\chi(E)$ тоже аддитивна в точных последовательностей, следовательно $\chi(E) = S(E, 0)$ для любого расслоения, допускающего резольвенту из прямых сумм линейных расслоений.

Впоследствии мы покажем, что всякое расслоение на проективном пространстве допускает такую резольвенту. Значит, по модулю этого утверждения теорема Римана-Роха доказана. □

Доказательство теоремы 12.1: Из Упр. 12.4 (3) и теоремы Римана-Роха следует

$$S(E, s) = S(E(s), 0) = \chi(E(s)) \in \mathbb{Z}$$

для любого $s \in \mathbb{Z}$. □

Замечание. Теорему Римана-Роха можно сформулировать для любого связного гладкого проективного многообразия X и любого когерентного пучка E на многообразии X. В такой формулировке она называется теоремой Римана-Роха-Хирцебруха и гласит

$$\chi(E) = \deg(\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(T_X)),$$

где $\chi(E) = \sum_{p=0}^{\dim X}(-1)^p \dim \mathrm{H}^p(X, E)$, $\mathrm{td}(T_X)$ обозначает класс Тодда касательного расслоения T_X, определяемый равенством

$$\mathrm{td}(T_X) = \prod_{i=1}^{\dim X} \frac{\mathrm{x}_i(T_X)}{1 - e^{-\mathrm{x}_i(T_X)}},$$

а deg обозначает проекцию $\mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2\dim X}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

12.2. **Топологическая классификация расслоений.** Определеним непрерывное векторное расслоение на многообразии X аналогично тому, как мы определяли алгебраическое векторное расслоение, заменив топологию Зарисского аналитической топологией и ослабив условие алегбраичности отображений π_E, g_{xy} до условия их непрерывности. Аналогично определим понятие непрерывного сечения, гомоморфизма и изоморфизма расслоений.

Упражнение 12.7. **(1)** Покажите, что категория непрерывных векторных расслоений полупроста, то есть для всякой точной последовательности непрерывных расслоений $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ имеем $E_2 \cong E_1 \oplus E_3$. **(2)** Проверьте, что классы Чженя определены в категории непрерывных расслоений.

Вопрос о дискретных инвариантах алгебраических расслоений сводится к классификации непрерывных векторных расслоений. Действительно, сопоставляя всякому алгебраическому расслоению его класс изоморфизма в категории непрерывных расслоений мы получаем дискретный инвариант. К сожалению задача о классификации непрерывных расслоений полностью не решена, однако некоторая информация об этом имеется.

Во-первых, можно доказать, что для непрерывных расслоений выполнены условия Шварценбергера (в отличии от теоремы Римана-Роха, которая для непрерывных расслоений не имеет смысла). Далее рассмотрим несколько случаев.

($\mathbf{r > n}$) Легко показать, что непрерывные расслоения всегда порождаются глобальными сечениями. В силу леммы 9.11 отсюда слудует, что всякое непрерывное расслоение E ранга $r > n$ содержит тривиальное подрасслоение ранга $r - n$, откуда в силу полупростоты категории непрерывных расслоений заключаем, что $E \cong \mathcal{O}_{\mathrm{cont}}^{r-n} \oplus E'$, где E' — непрерывное расслоение ранга n, а $\mathcal{O}_{\mathrm{cont}}^{r-n}$ — тривиальное расслоение ранга $r-n$. Ясно, что при этом $\mathrm{c}(E) = \mathrm{c}(E')$. Тем самым задача о классификации расслоений ранга $r > n$ сводится к задаче о классификации расслоений ранга n.

($\mathbf{r = n}$) В этом случае полная классификация дается теоремой Томаса.

Теорема 12.8 (Томас). *Для любого набора чисел* $(\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_n) \in \mathbb{Z}^n$, *удовлетворяющего условию Шварценбергера* S_n^n *существует едиственное с точностью до непрерывного изоморфизма расслоение* E *на* $\mathbb{P}^n$, *такое что* $\mathrm{c}_i(E) = \mathrm{c}_i$.

($\mathbf{r = 1}$) В этом случае условия Шварценбергера не накладывают никаких ограничений на значение $\mathrm{c}_1(E)$. На самом деле, можно показать что для любого $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$ существует едиственное с точностью до непрерывного изоморфизма расслоение E ранга 1 на $\mathbb{P}^n$, такое что $\mathrm{c}_1(E) = \mathrm{c}_1$.

($\mathbf{r = 2,\ n = 3}$) Условие Шварценбергера S_3^2 равносильно условию $\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 \equiv 0 \pmod 2$. По теореме Атьи-Риса для любых $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих этому условию существует непрерывное расслоение E ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, такое что $\mathrm{c}_i(E) = \mathrm{c}_i$. Более того, при нечетном c_1 такое расслоение едиственно с точностью до непрерывного изоморфизма, а при четном c_1 существует ровно 2 таких расслоения. Эти расслоения различаются с помощью так называемого альфа-инварианта $\alpha(E) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Для алгебраических расслоений альфа-инвариант можно вычислить как "половину" эйлеровой характеристики

$$\alpha(E) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, E(-k-2)) - \dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, E(-k-2)), \tag{12.9}$$

где $k = \mathrm{c}_1(E)/2$.

12.3. **Алгебраические структуры на непрерывных расслоениях.** Следующий вопрос — это наличие алгебраических расслоений в данном классе изоморфизма непрерывных расслоений или другими словами, возможность введения алгебраической структуры на данном непрерывном расслоении. Разберем ситуацию в случае $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$.

($\mathbb{P}^1$) Согласно предыдущему разделу классы изоморфизма непрерывных расслоений на $\mathbb{P}^1$ нумеруются парами (r, c_1), где $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$. Ясно, что расслоение $\mathcal{O}^{r-1} \oplus \mathcal{O}(\mathrm{c}_1)$ является алгебраическим расслоением, лежащем в соответствующем классе изоморфизма. Тем самым всякое непрерывное расслоение на $\mathbb{P}^1$ допускает алгебраическую структуру.

($\mathbb{P}^2$) В случае $r = 1$ ситуация аналогична предыдущему пункту. Классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 1 на $\mathbb{P}^2$ нумеруются числами $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$. Ясно, что расслоение $\mathcal{O}(\mathrm{c}_1)$ является алгебраическим расслоением, лежащем в соответствующем классе изоморфизма.

В случае $r = 2$ классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ нумеруются парами $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$, где $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$. Покажем, что всякое такое расслоение допускает алгебраическую структуру. Возьмем произвольные $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$ и положим $\Delta = \mathrm{c}_1^2 - 4\,\mathrm{c}_2$. Выберем теперь $k \in \mathbb{Z}$ так, чтобы

$$k \leq 2, \quad k^2 \geq \Delta \quad \text{и} \quad k \equiv \mathrm{c}_1 \pmod 2.$$

Тогда $\Delta = k^2 - 4m$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $m \geq 0$. Рассмотрим теперь расслоение $F_{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2} = E\left(\dfrac{\mathrm{c}_1 - k}{2}\right)$, где E — расслоение, получающееся применением конструкции Серра к набору m точек $Y = \{x_1, \dots, x_m\}$ и изоморфизму $\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}(k)_{|Y}$ (см. 11.11(1)). Легко показать, что $\mathrm{c}_i(F_{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2}) = \mathrm{c}_i$, что и требовалось.

Наконец, в случае $r > 2$ при произвольных $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$ расслоение $\mathcal{O}^{r-2} \oplus F_{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2}$ имеет классы Чженя c_1 и c_2. Таким образом, иы доказали

Теорема 12.10 (Шварценбергер). *Всякое непрерывное расслоение на $\mathbb{P}^2$ допускает алгебраическую структуру.*

($\mathbb{P}^3$) В случае $r = 1$ ситуация аналогична предыдущему пункту. Классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 1 на $\mathbb{P}^3$ нумеруются числами $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$. Ясно, что расслоение $\mathcal{O}(\mathrm{c}_1)$ является алгеброическим расслоением, лежащем в соответствующем классе изоморфизма.

В случае $r = 2$ классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ нумеруются парами $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$, где $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$, такими что $\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 \equiv 0 \pmod 2$ и в случае четного c_1 значением альфа-инварианта. Покажем, что всякое такое расслоение допускает алгебраическую структуру. Рассмотрим для этого расслоение E из примера 11.11(3), то есть расслоение, получающееся применением конструкции Серра к $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m$, где Y_i — полное пересечение поверхностей степеней a_i и a_i', $a_i + a_i' = k$, так что имеем точную последовательность $0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0$. Легко показать, что $\mathrm{c}_1(E) = k$, $\mathrm{c}_2(E) = \sum_{i=1}^m a_i a_i'$. При четном k надо еще вычислить альфа-инвариант.

Лемма 12.11. *Пусть k — четное положительное число, $m > 0$ и $a_1, \dots, a_m$ — набор целых чисел, таких что $1 \leq a_i \leq k/2$. Пусть $a_i' = k - a_i$, а E —*

расслоение, построенное выше. Тогда

$$\alpha(E) = (m-1)d(k/2-2) + \sum_{i=1}^{m} d(k/2-a_i-2),\ \text{где } d(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s = 4t,\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Заметим сначала, что $d(s) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(s)) \bmod 2$. Теперь приступим к вычислениям. Подкручивая на $\mathcal{O}(-k/2-2)$ точную последовательность, определяющую расслоение E, получаем

$$0 \to \mathcal{O}(-k/2-2) \to E(-k/2-2) \to J_Y(k/2-2) \to 0. \tag{12.12}$$

Кроме того, имеются последовательности

$$0 \to J_Y(k/2-2) \to \mathcal{O}(k/2-2) \to \mathop{\oplus}_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2) \to 0, \tag{12.13}$$

$$0 \to \mathcal{O}(-k/2-2) \to \mathcal{O}(k/2-a_i-2) \oplus \mathcal{O}(k/2-a_i'-2) \to \\ \to \mathcal{O}(k/2-2) \to \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2) \to 0. \tag{12.14}$$

Пользуясь последовательностью (12.14) легко вычислить $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2))$. Для этого заметим, что $(-k/2-2)$ и $(k/2-a_i'-2)$ строго меньше нуля, поэтому они не имеют когомологий в размерностях ≤ 2. Следовательно, их когомологии не оказывают влияния на $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2))$ и значит

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2)) = \\ = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k/2-2)) - \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k/2-a_i-2)) = \\ = d(k/2-2) + d(k/2-a_i-2) \bmod 2.$$

Далее, применяя последовательности (12.12) и (12.13) получаем

$$\alpha(E) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, E(-k/2-2)) + \dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, E(-k/2-2)) = \\ = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, J_Y(k/2-2)) - \dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, J_Y(k/2-2)) = \\ = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k/2-2)) - \textstyle\sum_{i=1}^m \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2)) = \\ = d(k/2-2) - md(k/2-2) - \textstyle\sum_{i=1}^m d(k/2-a_i-2) = \\ = (m-1)d(k/2-2) + \textstyle\sum_{i=1}^m d(k/2-a_i-2) \bmod 2.$$

$\square$

Остается заметить, что $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, т.ч. $c_1c_2 \equiv 0 \bmod 2$ (а при $c_1 \equiv 0 \bmod 2$ еще и $\forall \alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) найдутся такие $k \equiv c_1 \bmod 2$ и набор $0 < a_1, \dots, a_m \leq k/2$, так что $k^2 - 4\sum a_i(k-a_i) = \Delta(c_1, c_2) := c_1^2 - 4c_2$, а если k четно, то еще и $(m-1)d(k/2-2) + \sum_{i=1}^m d(k/2-a_i-2) = \alpha \bmod 2$. Дело это муторное, но никакой науки не требующее.

Теорема 12.15 (Атья–Рис–Хоррокс). *Всякое непрерывное расслоение ранга* 2 *на* $\mathbb{P}^3$ *допускает алгебраическую структуру.*

Аналогично доказывается

Теорема 12.16 (Фогелер). *Всякое непрерывное расслоение ранга* 3 *на* $\mathbb{P}^3$ *допускает алгебраическую структуру.*

Расслоения строятся в виде расширения $0 \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0$, где $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m$, Y_i — пересечение поверхностей степеней a_i, a_i' и $a_i + a_i' \geq k$.

Вопрос о существовании алгебраической структуры на непрерывных расслоениях на $\mathbb{P}^n$ при $n \geq 4$ не решен.

13. Стабильность.

На прошлой лекции мы изучили дискретные инварианты расслоений. Следующий шаг в классификации — описание всех расслоений с данными дискретными инвариантами. Как мы впоследствии увидим, расслоения иногда вырождаются в не локально свободные пучки, поэтому естественно сразу рассматривать множество всех когерентных пучков с данными дискретными инвариантами. Наиболее удобный набор дискретных инвариантов дает функция Гильберта.

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Положим $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(F(m))$.

Лемма 13.1. *Функция $P_{\mathcal{F}}(m)$ — многочлен степени $\le n$ с рациональными коэффициентами, причем $P_{\mathcal{F}}(m) = r\frac{m^n}{n!} + (r\frac{n+1}{2} + \mathrm{c}_1)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$.*

Доказательство: Вначале проверим формулу для локально свободного $\mathcal{F}$. На прошлой лекции мы показали, что $P_{\mathcal{F}}(m) = \sum_{i=1}^{r}\binom{m+n+x_i}{n}$, где x_i — корни Чженя. Выделяя старшие члены и пользуясь тем, что $\sum x_i = \mathrm{c}_1$, получаем формулу. Далее, замечаем, что $P_{\mathcal{F}}(m)$ аддитивно в точных последовательностях, так же как и r и c_1, значит формула верна для всех пучков. $\square$

Многочлен $P_{\mathcal{F}}(m)$ называется *многочленом Гильберта* пучка $\mathcal{F}$. На самом деле, утверждение аналогичное лемме 13.1 выполняется для произвольного проективного многообразия X. Действительно, согласно теореме Римана–Роха, имеем $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(\mathcal{F}(m)) = \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{F}(m)) \cdot \mathrm{td}(T_X))$. С другой стороны, характер Черна мультипликативен, поэтому $\mathrm{ch}(\mathcal{F}(m)) = \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{O}(m)) = \mathrm{ch}(\mathcal{F})(1 + mh + \frac{m^2}{2}h^2 + \dots + \frac{m^n}{n!}h^n)$. Записывая класс Тодда в виде $\mathrm{td}(T_X) = 1 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$, $t_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$, получаем

$$P_{\mathcal{F}}(m) = r\frac{m^n h^n}{n!} + (rt_1 + \mathrm{ch}_1)\frac{m^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + (rt_k + \mathrm{ch}_1 t_{k-1} + \dots + \mathrm{ch}_k)\frac{m^{n-k}h^{n-k}}{(n-k)!} + \dots$$

Заметим, что по многочлену Гильберта однозначно восстанавливаются коэффициенты характера Чженя (точнее говоря, произведения $\mathrm{ch}_k \cdot h^{n-k}$), а значит и классы Чженя. Поэтому многочлен Гильберта можно считать тем самым дискретным инвариантом, который мы фиксируем.

Итак, рассмотрим множество M_P всех расслоений (когерентных пучков), многочлен Гильберта которых равен P. Оказывается, на этом множестве *почти* можно ввести структуру алгебраического многообразия! Что значит "почти" разберемся позже, а вначале обсудим, как на абстрактном множестве можно ввести структуру алгебраического многообразия.

Пусть X — алгебраическое многообразие. Сопоставим ему контравариантный функтор $P_X : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ из категории *схем* (то есть топологических пространств с пучком колец, которые локально изоморфны аффинным многообразиям) в категорию множеств, следующим образом

$$P_X(S) = \mathsf{Map}(S, X) \qquad \text{(множество всех алгебраических отображений)}$$

Заметим, что это действительно функтор: всякому алгебраическому отображению $f : T \to S$ сопоставляется отображение $f^* : P_X(S) \to P_X(T)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$.

Лемма 13.2. *Если функторы P_X и P_Y изоморфны, то $X \cong Y$.*

Доказательство: Пусть $F : P_X \to P_Y$ и $G : P_Y \to P_X$ — взаимно-обратные изоморфизмы. Рассмотрим множество $P_X(X)$. В нем есть выделенный элемент id_X. Рассмотрим элемент $f := F(\mathrm{id}_X) \in P_Y(X) = \mathsf{Map}(X, Y)$. Аналогично, пусть $g := G(\mathrm{id}_Y) \in P_X(Y) = \mathsf{Map}(Y, X)$. Заметим, что $g \circ f = f^*(g) = f^*(G(\mathrm{id}_Y)) = G(f^*(\mathrm{id}_Y)) = G(\mathrm{id}_Y \circ f) = G(f) = G(F(\mathrm{id}_X)) = \mathrm{id}_X$ (в третьем равенстве мы воспользовались функториальностью G). Аналогично $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. $\square$

Функтор P_X называется *функтором точек* многообразия X, а его значение на схеме S — множеством S-*точек* многообразия X. Например, если $\mathsf{p} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ — точка, то множество p-точек многообразия X — это множество его точек в обычном смысле. Таким образом, чтобы задать на множестве X структуру алгебраического многообразия, надо задать множество его S-точек для всех S (а не только для $S = \mathsf{p}$), причем так, чтобы зависимость от S была функториальна.

Естественно задать вопрос, всякий ли функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ является функтором точек какого-то многообразия.

Определение. Функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору P_X для какого-то многообразия X. В этом случае, также говорят, что многообразие X *представляет* функтор F.

Пример 13.3. Пусть V — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $\mathbf{P}(V) : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$, который схеме S сопоставляет множество всех линейных подрасслоений $\mathcal{L} \subset V \otimes \mathcal{O}_S$, а морфизму $f : T \to S$ — отображение $f^* : (\mathcal{L} \subset V \otimes \mathcal{O}_S) \mapsto (f^*\mathcal{L} \subset V \otimes \mathcal{O}_T)$. Легко видеть, что он изоморфен функтору точек проективного пространства $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 13.4. Покажите, что функтор $\mathbf{Gr}(r, V)$, которой схеме S сопоставляет множество всех подрасслоений $\mathcal{E} \subset V \otimes \mathcal{O}_S$ ранга r, представляется многообразием $\mathrm{Gr}(r, V)$.

Конечно, не всякий функтор представим — в этом мы скоро убедимся. А пока подумаем, как “продолжить” множество M всех расслоений на многообразии X с данным многочленом Гильберта до функтора.

Пусть S — произвольная схема. Если $\varphi : S \to M$ — отображение, то всякой точке $s \in S$ можно сопоставить расслоение $E_{\varphi(s)}$ на X, соответсвующее точке $\varphi(s) \in M$. Иначе говоря, отображению $S \to M$ соответствует семейство расслоений на X, параметризованное точками S. Следовательно, чтобы задать функтор, нам надо задать класс семейств расслоений, которые мы хотим считать соответствующими алгебраическим отображениям $S \to M$.

Попытка 1. Определим функтор $\mathbf{M}_P$ так: $\mathbf{M}_P(S)$ — это множество классов изоморфизма расслоений E на $S \times X$, таких что для всякой точки $s \in S$ имеем $P_{E_s} = P$, а если $f : T \to S$, то $E \in \mathbf{M}_P(S) \mapsto (f \times \mathrm{id}_X)^* E \in \mathbf{M}_P(T)$.

Сразу видно, что это определение не очень удачное. Например, если X — точка, и нас интересуют расслоения ранга 1 на X (то есть $P(m) \equiv 1$), то $\mathbf{M}_1(S)$ — множество линейных расслоений на S, что не соответствует ожиданиям.

Попытка 2. Определим $\mathbf{M}_P(S)$ как множество классов эквивалентности расслоений E на $S \times X$, таких что для всякой точки $s \in S$ имеем $P_{E_s} = P$, относительно эквивалентности $E \sim E \otimes p_S^* \mathcal{L}$ для всех линейных расслоений $\mathcal{L}$ на S.

У этого определения тоже свои сюрпризы. Посмотрим, например, к чему оно приводит для $X = \mathbb{P}^1$. Рассмотрим вначале случай $r = 1$, $c_1 = d$, то есть $P(m) = m + d + 1$. В этом случае $\mathbf{M}_{m+d+1}(S)$ — это все линейные расслоения на $S \times \mathbb{P}^1$, послойной степени d с точностью до подкрутки на расслоение на S. Таким образом, $\mathbf{M}_{m+d+1}(S) = \{\mathsf{p}\}$ — представляется точкой.

Пусть теперь $r = 2$, а $c_1 = 0$ (то есть $P(m) = 2m + 2$). Ясно, что расслоение ранга 2 и степени 0 на $\mathbb{P}^1$ — это $\mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(-k)$, поэтому естественно было бы предположить, чтобы функтор $\mathbf{M}_{2m+2}$ представлялся бы множеством $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Однако, это не так.

Рассмотрим $S = \mathbb{P}^1$ и расслоение E на $S \times X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, определяемое как $E = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{S\times X} \oplus \mathcal{O}_{S\times X} \to i_*\mathcal{O}_X(1))$, где $i : X = \{s_0\} \times X \to S \times X$.

Упражнение 13.5. Покажите, что **(1)** E — расслоение; **(2)** если $s \neq s_0$, то $E_s = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$, а $E_{s_0} = \mathcal{O}_X(1) \oplus \mathcal{O}_X(-1)$.

Из упражнения следует, что функтор $\mathbf{M}_{2m+2}$ непредставим. Действительно, если бы он был представим многообразием M, то расслоению E соответствовало бы отображение $\mathbb{P}^1 \to M$, которое переводило бы $\mathbb{P}^1 \setminus \{s_0\}$ в точку m_0, соответствующую расслоению $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, а точку s_0 — в точку $m_1 \neq m_0$. Эта ситуация совершенно типичная.

Упражнение 13.6. Пусть X — многообразие, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — расслоения на X, а $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ — расширение. Рассмотрим $E = \mathrm{Ker}(p_X^*\mathcal{E} \to i_{s_0*}\mathcal{E}_2)$ на $\mathbb{P}^1 \times X$, где $p_X : \mathbb{P}^1 \times X \to X$ — проекция, а $i_{s_0} : X = \{s_0\} \times X \to X$ — вложение. Покажите, что **(1)** E — расслоение; **(2)** если $s \neq s_0$, то $E_s = \mathcal{E}$, а $E_{s_0} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.

На самом деле все это означает, что функтор $\mathbf{M}_P$ представляется *стеком*. Однако, стеки не входят в нашу программу, поэтому постараемся поправить наш функтор, чтобы он был представим многообразием. Наиболее естественный способ исправления функтора — запретить расслоения вида $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. На самом деле, чтобы все стало хорошо, приходится запретить более широкий класс расслоений (их называют “нестабильными”). При этом есть несколько различных подходов к определению стабильности. Они приводят к различным функторам и, соответственно, к различным многообразиям модулей.

Наиболее простым является подход Мамфорда–Такемото. Будем сразу работать с произвольными когерентными пучками, а не только с расслоениями.

Определение. Пусть F — когрентный пучок на $X = \mathbb{P}^n$. *Наклоном* F называется рациональное число $\mu(F) = c_1(F)/r(F)$.

Определение. Пучок E на $X = \mathbb{P}^n$ называется *стабильным по Мамфорду* или *μ-стабильным* (соотв. *полустабильным по Мамфорду*, *μ-полустабильным*), если для всякого подпучка $0 \neq F \subset E$ с $r(F) < r(E)$ выполняется неравенство $\mu(F) < \mu(E)$ (соотв. $\mu(F) \leq \mu(E)$).

Теперь нам надо сформулировать понятие семейства стабильных когерентных пучков. Как и в случае с расслоениями семейством пучков на X, параметризованным многообразием S, естественно считать просто когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $S \times X$. При этом точке s сопоставляется пучок $\mathcal{F}_s := i_s^*\mathcal{F}$ на X, где $i_s : X \to \{s\} \times X \subset S \times X$. Заметим, однако, что если $\mathcal{F}$ не является расслоением, то у функтора i_s^* вполне могут быть производные функторы. Кроме того, нет гарантии, что многочлен Гильберта пучков $\mathcal{F}_s$ не зависят от s. Так вот, оказывается, есть замечательное условие, гарантирующие как отсутствие производных функторов, так и постоянность многочлена Гильберта.

Определение. Пусть $f : \mathcal{X} \to S$ — произвольный морфизм. Пучок $\mathcal{F}$ на $\mathcal{X}$ называется *плоским над* S, если $\forall x \in \mathcal{X}$ существуют окрестности $x \in U \subset \mathcal{X}$ и $f(x) \in U' \subset f(U) \subset S$, такие что $\mathcal{F}(U)$ является плоским $\mathcal{O}_S(U')$-модулем. Морфизм $f : \mathcal{X} \to S$ называется плоским, если $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ — плоский пучок над S.

С плоскими пучками и морфизмами мы уже сталкивались, когда изучали теорему полунепрерывности.

Лемма 13.7. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на $S \times X$ плоский над S. Тогда для всех $s \in S$ имеем $L_k i_s^* \mathcal{F} = 0$ при $k > 0$.*

Доказательство: По формуле проекции $i_{s*} L_k i_s^* \mathcal{F} = \operatorname{Tor}_k(\mathcal{F}, i_{s*}\mathcal{O}_X)$, но по теореме о плоской замене базы $i_{s*}\mathcal{O}_X = f^*\mathcal{O}_s$, где $f : S \times X \to S$ — проекция. Поэтому, в силу плоскости $\mathcal{F}$ имеем $\operatorname{Tor}_{>0} = 0$ и остается заметить, что так как i_s — замкнутое вложение, то $i_{s*}(F) = 0$ влечет $F = 0$. $\square$

Лемма 13.8. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на $S \times X$ плоский над S. Тогда функция $s \mapsto P_{\mathcal{F}_s}(m)$ локально постоянна.*

Доказательство: Вопрос локален по S, поэтому можно считать S аффинным. Заметим, что $H^k(X, \mathcal{F}_s(m)) = H^k(X, i_s^*\mathcal{F}(m)) = H^k(S \times X, i_{s*}i_s^*\mathcal{F}(m)) = H^k(S \times X, \mathcal{F}(m) \otimes i_{s*}\mathcal{O}_X) = H^k(S \times X, \mathcal{F}(m) \otimes f^*\mathcal{O}_s) = \Gamma(S, R^k f_*\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{O}_s)$. Выберем у X аффинное покрытие $\{U_\bullet\}$ и рассмотрим комплекс Чеха $\mathcal{C}^\bullet := \mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{F}(m)}$. Ясно, что $R^k f_*\mathcal{F}(m)$ равно k-ой когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet$. Заметим также, что $\mathcal{C}^\bullet$ — комплекс плоских модулей, поэтому $R^k f_*\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{O}_s$ равно k-ой когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet \otimes \mathcal{O}_s$. Предположим теперь, что $\mathcal{C}^\bullet$ — ограниченный комплекс локально свободных пучков конечного ранга. Тогда $P_{\mathcal{F}_s}(m) = \sum(-1)^k \dim H^k(X, \mathcal{F}_s(m)) = \sum(-1)^k \dim H^k(\mathcal{C}^\bullet \otimes \mathcal{O}_s) = \sum(-1)^k \dim \mathcal{C}^k \otimes \mathcal{O}_s = \sum(-1)^k r(\mathcal{C}^k)$, что очевидно не зависит от s. В общем же случае, пользуясь тем, что $\mathcal{C}^\bullet$ — комплекс плоских модулей, когомологии которого конечно порождены, можно построить ограниченный комплекс свободных модулей конечного ранга $Q^\bullet$ и морфизм комплексов $Q^\bullet \to \mathcal{C}^\bullet$, который индуцирует изоморфизм на когомологиях комплексов $Q^\bullet \otimes \mathcal{O}_s$ и $\mathcal{C}^\bullet \otimes \mathcal{O}_s$. $\square$

Попытка 3. Определим $\mathbf{M}_P^{Ms}(S)$ и $\mathbf{M}_P^{Mss}(S)$ как множества классов эквивалентности когерентных пучков E на $S \times X$ плоских над S, таких что для всякой точки $s \in S$ пучок E_s стабилен (соотв. полустабилен) по Мамфорду и $P_{E_s} = P$, относительно эквивалентности $E \sim E \otimes p_S^*\mathcal{L}$ для всех линейных расслоений $\mathcal{L}$ на S.

Пример 13.9. На $\mathbb{P}^1$ стабильными являются только линейные расслоения, а полустабильными — расслоения вида $\mathcal{O}(k)^{\oplus r}$.

Другой подход, предложенный Гизекером, часто удобнее. Отождествим кольцо $H^\bullet(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$ с кольцом многочленов степени $\leq n$.

Определение. Пусть F — когрентный пучок на $X = \mathbb{P}^n$. *Наклоном по Гизекеру* пучка F называется многочлен $p_F(m) = P_F(m)/r(F) \in \mathbb{Q}[m]$.

Рассмотрим на многочленах следующий порядок: положим $p_1 < p_2$, если $p_1(m) < p_2(m)$ при $m \gg 0$.

Определение. Пучок E на $X = \mathbb{P}^n$ называется *полустабильным по Гизекеру* (соотв. *полустабильным по Гизекеру*), если для всякого подпучка $0 \neq F \subset E$ с $r(F) < r(E)$ выполняется неравенство $p_F < p_E$ (соотв. $p_F \leq p_E$).

Упражнение 13.10. **(1)** E стабилен по Мамфорду $\Longrightarrow$ E стабилен по Гизекеру. **(2)** E полустабилен по Гизекеру $\Longrightarrow$ E полустабилен по Мамфорду.

Попытка 4. Определим $\mathbf{M}_P^{Gs}(S)$ и $\mathbf{M}_P^{Gss}(S)$ как множества классов эквивалентности расслоений E на $S \times X$, таких что для всякой точки $s \in S$ расслоение $E_s := E_{\{s\}\times X}$ стабильно (соотв. полустабильно) по Гизекеру и $P_{E_s} = P$, по модулю эквивалентности $E \sim E \otimes p_S^* \mathcal{L}$ для всех линейных расслоений $\mathcal{L}$ на S.

Теорема 13.11 (Симпсон). *Функтор* $\mathbf{M}_P^{Gs}$ *представим квазипроективным многообразием* $\mathcal{M}_P^{Gs}$.

Многообразие $\mathcal{M}_P^{Gs}$, представляющее функтор $\mathbf{M}_P^{Gs}$, называется многообразием модулей стабильных по Гизекеру пучков с многочленом Гильберта P.
Идея доказательства: Во-первых, доказывается, что множество классов изоморфизма всех стабильных по Гизекеру пучков с данным многочленом Гильберта ограничено, т.е. существует такое многообразие M' и пучок $\mathcal{F}$ на $M' \times X$, плоский над M', так что для любого стабильного по Гизекеру пучка F с данным многочленом Гильберта найдется точка $s \in M'$, такая что $\mathcal{F}_s \cong F$. Далее выбирается $m \gg 0$, такое что для всех s выполняется $H^{>0}(X, \mathcal{F}_s(m)) = 0$ и пучок $\mathcal{F}_s(m)$ порождается глобальными сечениями. Здесь используется квазикомпактность M'. Заметим, что $k := \dim H^0(X, \mathcal{F}_s(m)) = P_{\mathcal{F}_s}(m)$ не зависит от s. По построению всякий стабильный по Гизекеру пучок с многочленом Гильберта P является факторпучком пучка $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus k}$.

Пусть $\mathcal{E}$ — когерентный пучок на X. Рассмотрим функтор $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}$, определямый так: $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}(S)$ — множество классов изоморфизма плоских над S факторпучков $\mathcal{F}$ пучка $p_X^*\mathcal{E}$ на $S \times X$, таких что $P_{\mathcal{F}_s} = P$ для всех $s \in S$.

Теорема 13.12 (Гротендик). *Функтор* $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}$ *представим.*

Пусть $\mathrm{Quot}_{\mathcal{E},P}$ — многообразие, представляющая функтор $\mathbf{Quot}_{\mathcal{E},P}$. Рассмотрим многообразие $Q = \mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus k},P}$. На Q действует группа GL_k автоморфизмов пучка $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus k}$. Оказывается, точка $s \in Q$ (полу)стабильна в смысле геометрической теории инвариантов тогда и только тогда, когда соответствующий факторпучок $\mathcal{F}_s$ (полу)стабилен по Гизекеру! Отсюда видно, что фактор множества стабильных точек Q^s/GL_k представляет $\mathbf{M}^{Gs}(P)$. $\square$

Определение. Рассмотрим функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Многообразие M *копредставляет* функтор F, если существует морфизм функторов $F \to P_M$, такой что любой морфизм функторов $F \to P_X$ пропускается через P_M.

Теорема 13.13 (Симпсон). *Функтор* $\mathbf{M}_P^{Gss}$ *копредставляется проективным многообразием* $\mathcal{M}_P^{Gss} = Q^{ss}/\mathrm{GL}_k$.

Если функтор модулей представим, то многообразие модулей называется *тонким*, а если только копредставим, то *грубым*. Если $\mathcal{M}$ — тонкое многообразие модулей, то на $\mathcal{M} \times X$ существует *универсальное семейство* — пучок $\mathcal{E}$, соответсвующий элементу $\mathrm{id}_{\mathcal{M}} \in P_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = \mathbf{M}(\mathcal{M})$. Он обладает тем свойством, что для всякого многообразия S и пучка $\mathcal{F} \in \mathbf{M}(S)$ на $S \times X$ существует отображение $f : S \to \mathcal{M}$, такое что $\mathcal{F} \cong f^*\mathcal{E} \otimes p_S^*\mathcal{L}$.

14. Структура когерентных пучков.

Чтобы научиться проверять стабильность расслоений, нам понадобятся некоторые общие сведения о пучках.

Определение. Квазикогерентный пучок T называется *пучком кручения*, если всякое его сечение анулируется (локально) умножением на какую-либо ненулевую функцию.

Пучками кручения являются, например, структурный пучок подсхемы, или прямая сумма всех структурных пучков точек.

Упражнение 14.1. Покажите, что если T — когерентный пучок кручения, то (локально) существует функция, анулирующая любое его сечение.

Пример 14.2. Когерентные пучки на $\mathbb{A}^1$ — это то же самое, что и конечно порожденные $\mathbb{C}[x]$-модули. При этом пучки кручения соответствуют модулям, анулируемым некоторым многочленом, то есть конечномерным модулям. Конечномерный $\mathbb{C}[x]$-модуль — это конечномерное векторное пространство с оператором. По теореме о жордановой нормальной форме он изоморфен прямой сумме модулей вида $\mathbb{C}[x]/(x-\lambda)^n\mathbb{C}[x]$. Значит всякий пучок кручения на $\mathbb{A}^1$ есть прямая сумма пучков $\mathcal{O}/J_P^n$, где J_P — пучок идеалов точки P. Ровно то же утверждение очевидно верно и для $\mathbb{P}^1$ (а на самом деле и для любой кривой).

Определение. Квазикогерентный пучок F называется *пучком без кручения*, если он не содержит подпучков, являющихся пучками кручения.

Упражнение 14.3. Покажите, что **(1)** локально свободный пучок не имеет кручения; **(2)** пучок $\mathcal{K}$, такой что $\mathcal{K}(U)$ — поле рациональных функций на U, квазикогерентен и не имеет кручения; **(3)** если $F\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{K}=0$, то F — пучок кручения; **(4)** функтор $F\mapsto F\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{K}$ точен.

Упражнение 14.4. Покажите, что **(1)** прямая сумма пучков (без) кручения — пучок (без) кручения; **(2)** расширение пучков (без) кручения — пучок (без) кручения; **(3)** факторпучок пучка кручения — пучок кручения; **(4)** подпучок пучка без кручения не имеет кручения; **(5)** если T — пучок кручения, а F — пучок без кручения, то $\mathrm{Hom}(T,F)=0$.

Лемма 14.5. *Пусть E — когерентный пучок. Найдется единственный подпучок кручения $T_E\subset E$, т.ч. факторпучок $F_E=E/T_E$ — пучок без кручения. Точная последовательность $0\to T_E\to E\to F_E\to 0$ функториальна.*

Доказательство: Вложение $\mathcal{O}\subset\mathcal{K}$ индуцирует морфизм $\varphi_E : E\to E\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{K}$. Положим $T_E=\mathrm{Ker}\,\varphi_E$, $F_E=\mathrm{Im}\,\varphi_E$. Легко видеть, что T_E — пучок кручения (если $s\in\Gamma(U,E)$ и $s\otimes 1=0$ в $E\otimes\mathcal{K}$, то $s\cdot f=0$ для какой-то $f\in\Gamma(U,\mathcal{O})$). С другой стороны, F_E — подпучок в $E\otimes\mathcal{K}$, но легко видеть, что $E\otimes\mathcal{K}\cong\mathcal{K}^{\oplus r(E)}$, поэтому $E\otimes\mathcal{K}$ — пучок без кручения, а значит и F_E также. Пусть теперь $0\to T'\to E\to F'\to 0$ какая-либо точная последовательность, в которой T' — пучок кручения, а F' — пучок без кручения. Заметим, что по Упр. 14.4 (5) композиция $T'\to E\to F_E$ — нулевая, поэтому вложение $T'\to E$ пропускается через $T'\to T_E$. Аналогично, вложение $T_E\to E$ пропускается через $T_E\to T'$. Значит $T'=T_E$ и $F'=F_E$. $\square$

Чуть позже мы покажем, что на кривой всякий пучок есть сумма пучка кручения и пучка без кручения. Вообще же это не так.

Упражнение 14.6. Покажите, что если E — пучок на $\mathbb{P}^2$, являющийся нетривиальным расширением $0 \to i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$, то $E \not\cong T_E \oplus F_E$.

Пусть E — когерентный пучок. Напомним обозначение $E^* = \mathcal{H}om(E, \mathcal{O})$.

Упражнение 14.7. Покажите, что для любого E пучок E^* — без кручения.

Лемма 14.8. *Функтор $\mathcal{H}om$ коммутирует с функтором $E \mapsto E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$, то есть $\mathcal{H}om(E,F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})$.*

Доказательство: воспользуемся изоморфизмами $\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})$. Остается доказать, что $\mathcal{H}om(E,F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})$. Пусть $\phi \in \mathcal{H}om(E,F)$, $f \in \mathcal{K}$. Сопоставим элементу $\phi \otimes f \in \mathcal{H}om(E,F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ морфизм $f\phi : E \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$, $f\phi(e) := \phi(e) \otimes f$. Проверим, что это изоморфизм.

Пусть $\sum \phi_i \otimes f_i$ переходит в ноль. Приводя f_i к общему знаменателю и перенося числитель налево, видим, что $\sum \phi_i \otimes f_i = \phi \otimes (1/a)$, причем $(1/a)\phi = 0$. Но тогда $\phi = a \cdot (1/a)\phi = 0$, значит $\phi \otimes 1/a = 0$.

Возьмем теперь произвольный $\psi : E \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$. Так как E когерентен, локально существует конечное число образующих $e_1, \ldots, e_n$. Пусть a — общий знаменатель для $\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)$. Тогда $a\psi(e_i) \in F$, значит $\phi := a\psi : E \to F$. При этом $\phi \otimes (1/a)$ переходит в ψ. □

Определим морфизм пучков $\mu_E : E \to E^{**}$ следующим образом: если U — аффинное открытое множество и $s \in \Gamma(U, E)$, то $\mu(s) : \Gamma(U, E^*) \to \Gamma(U, \mathcal{O})$, $f \in \Gamma(U, E^*) = \mathrm{Hom}(\Gamma(U,E), \Gamma(U,\mathcal{O})) \mapsto f(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O})$. Заметим, что μ_E — морфизм функторов: если $f : E \to F$, то $\mu_F \circ f = f^{**} \circ \mu_E$.

Определение. Пучок E — рефлексивный, если $\mu_E : E \to E^{**}$ — изоморфизм.

Упражнение 14.9. Проверьте, что локально свободные пучки рефлексивны.

Лемма 14.10. *Если E когерентен, то $\mathrm{Ker}\,\mu_E$ и $\mathrm{Coker}\,\mu_E$ — пучки кручения.*

Доказательство: В силу леммы 14.8 имеем $E^{**} \otimes \mathcal{K} \cong (E \otimes \mathcal{K})^{**} \cong E \otimes \mathcal{K}$. Поэтому, по Упр. 14.3 (4) имеем $\mathrm{Ker}\,\mu_E \otimes \mathcal{K} = \mathrm{Coker}\,\mu_E \otimes \mathcal{K} = 0$, и остается использовать Упр. 14.3 (3). □

Упражнение 14.11. Докажите, что $\mathrm{Ker}\,\mu_E = T_E$, $\mathrm{Im}\,\mu_E = F_E$.

Лемма 14.12. *Для любого пучка F пучок F^* рефлексивен.*

Доказательство: Рассмотрим морфизм $\mu_{F^*} : F^* \to F^{***}$, а также морфизм $\mu_F^* : F^{***} \to F^*$, сопряженный к морфизму $\mu_F : F \to F^{**}$. Проверим, что они взаимно обратны. Вопрос локален, поэтому можно считать, что F — факторпучок свободного пучка $\mathcal{O}^n$. Пусть $f : \mathcal{O}^n \to F$ — сюръекция. Тогда $f^* : F^* \to \mathcal{O}^n$ — вложение. Рассмотрим также морфизмы $f^{**} : \mathcal{O}^n \to F^{**}$ и $f^{***} : F^{***} \to \mathcal{O}^n$. Ввиду функториальности имеем коммутативные диаграммы (третья получается из второй сопряжением)

$$\begin{tikzcd} F^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mu_{F^*}"] & \mathcal{O}^n \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ F^{***} \arrow[r, "f^{***}"] & \mathcal{O}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F \arrow[d, "\mu_F"] \\ \mathcal{O}^n \arrow[r, "f^{**}"] & F^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^* \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{O}^n \\ F^{***} \arrow[r, "f^{***}"] \arrow[u, "\mu_F^*"] & \mathcal{O}^n \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Значит $f^* \circ \mu_F^* \circ \mu_{F^*} = \mathrm{id} \circ f^{***} \circ \mu_{F^*} = \mathrm{id} \circ f^* \circ \mathrm{id} = f^*$. Но f^* — вложение, поэтому $\mu_F^* \circ \mu_{F^*} = \mathrm{id}_{F^*}$ и, значит, $F^{***} = F^* \oplus \operatorname{Coker} \mu_{F^*}$. Но $\operatorname{Coker} \mu_{F^*}$ — пучок кручения по лемме 14.10, а F^{***} не имеет кручения по лемме 14.7, поэтому $\operatorname{Coker} \mu_{F^*} = 0$ и $F^{***} = F^*$. □

Упражнение 14.13. Докажите, что когерентный пучок E не имеет кручения $\Longleftrightarrow$ E есть подпучок локально свободного пучка.

Теорема 14.14. *Если E — рефлексивный пучок ранга 1, то E — локально свободен.*

Эту важную теорему мы оставляем без доказательства.

Упражнение 14.15. Докажите, что если E — пучок без кручения ранга 1, то $E \cong L \otimes J$, где L — линейное расслоение, а $J \subset \mathcal{O}$ — пучок идеалов.

Теперь поговорим о гомологических свойствах пучков.

Лемма 14.16. *Всякий пучок на гладком n-мерном многообразии X локально имеет резольвенту из локально свободных пучков длины $\le n$.*

Доказательство: Рассмотрим произведение $X \times X$ и диагональ $\Delta(X) \subset X \times X$. Так как X гладко, уменьшая X можно считать, что X — аффинно и $\Delta(X) = \{f_1 = \dots = f_n = 0\}$, где f_i — регулярные функции на X. Значит комплекс Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}_{X\times X} \to \dots \to \mathcal{O}_{X\times X}^{\oplus\binom{n}{2}} \to \mathcal{O}_{X\times X}^{\oplus n} \to \mathcal{O}_{X\times X} \to \Delta_*\mathcal{O}_X \to 0$$

является резольвентой пучка $\Delta_*\mathcal{O}_X$. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — пучок на X. Обозначим через p и q проекции $X \times X \to X$. Домножим комплекс Кошуля на $p^*\mathcal{F}$. Так как $p^*\mathcal{F} \otimes \Delta_*\mathcal{O}_X \cong \Delta_*(\Delta^* p^*\mathcal{F})$. Но $p \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, поэтому это равно $\Delta^* p^* \mathcal{F} \cong \mathcal{F}$. Получаем точную последовательность

$$0 \to p^*\mathcal{F} \to \dots \to p^*\mathcal{F}^{\oplus\binom{n}{2}} \to p^*\mathcal{F}^{\oplus n} \to p^*\mathcal{F} \to \Delta_*\mathcal{F} \to 0$$

Применим теперь функтор q_*. Так как $q \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, то $q_*\Delta_*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ и получается точная последовательность

$$0 \to q_*p^*\mathcal{F} \to \dots \to q_*p^*\mathcal{F}^{\oplus\binom{n}{2}} \to q_*p^*\mathcal{F}^{\oplus n} \to q_*p^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0$$

Наконец, по теореме о плоской замене базы $q_*p^*\mathcal{F} \cong H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X$, поэтому это — локально свободная резольвента длины n. □

Следствие 14.17. *Если X — гладко, $\dim X = n$, то $\mathcal{E}xt^{>n}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$.*

Доказательство: используем для вычисления $\mathcal{E}xt$ локальную свободную резольвенту длины n пучка $\mathcal{F}$. □

Лемма 14.18. *Пусть X — гладко и проективно, и $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > m$. Тогда $\mathcal{F}$ имеет локально свободную резольвенту длины m.*

Доказательство: Индукция по m. База — $m = 0$ нам известна. Пусть теперь $m > 0$. Рассмотрим сюръекцию $\mathcal{O}_X(-N)^{\oplus k} \to \mathcal{F}$ и пусть $\mathcal{F}'$ — ее ядро. Тогда из т.п. $\mathcal{E}xt$ получаем $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}', \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^{i+1}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ при $i > m - 1$, значит по предположению индукции $\mathcal{F}'$ имеет резольвенту длины $m - 1$, а стало быть $\mathcal{F}$ имеет резольвенту длины m. □

Упражнение 14.19. Если X — гладко и проективно, $\dim X = n$, то всякий пучок на X имеет локально свободную резольвенту длины n.

Лемма 14.20. *Для всех $i > 0$ пучок $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ — пучок кручения.*

Доказательство: лемма 14.8 дает $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{K} \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{K}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{K}) = 0$, так как $\mathcal{K}$ — поле. Остается применить Упр. 14.3 (3). $\square$

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на гладком многообразии X. Рассмотрим $\operatorname{supp} \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. По предыдущей лемме это замкнутое (по Зарискому) собственное (при $i > 0$) подмножество. Обозначим

$$S_m(\mathcal{F}) = \cup_{i=n-m}^{n} \operatorname{supp} \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \quad (m \leq n-1); \qquad S(\mathcal{F}) = S_{n-1}(\mathcal{F}).$$

Это замкнутые собственные подмножества в X.

Лемма 14.21. *Пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на $X \setminus S(\mathcal{F})$.*

Доказательство: так как $\mathcal{E}xt^i$ коммутируют с ограничениями на открытые подмножества, на $X \setminus S(\mathcal{F})$ имеем $\mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = 0$. $\square$

Множество $S(\mathcal{F})$ называется *множеством особенностей* пучка $\mathcal{F}$, а множество $S_m(\mathcal{F})$ — его *m-ым множеством особенностей.*

Упражнение 14.22. Покажите, что на $X \setminus S_m(\mathcal{F})$ пучок $\mathcal{F}$ имеет локально свободную резольвенту длины $n - m$.

Теорема 14.23. *Если X гладко, $\dim X = n$, то $\dim S_m(\mathcal{F}) \leq m$.*

Доказательство: X можно считать аффинным. Пусть Z — неприводимая компонента в $\operatorname{supp} \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\dim Z = d$. Уменьшив X, можно найти гладкое отображение $f : X \to \mathbb{A}^d$, такое что $f_{|Z} : Z \to \mathbb{A}^d$ является накрытием (гладкость означает, что df везде сюръективно). Покажем, что всякий пучок $\mathcal{F}$ на X локально имеет резольвенту длины $n - d$ пучками вида $f^*\mathcal{M}$. Доказательство такое же, как и у леммы 14.16, только вместо произведения $X \times X$ надо рассмотреть расслоенное произведение $X \times_{\mathbb{A}^d} X$, а теорема о плоской замене базы примет вид $q_* p^* \mathcal{F} \cong f^* f_* \mathcal{F}$. Итак, выберем резольвенту

$$0 \to f^*\mathcal{M}_{n-d} \to \cdots \to f^*\mathcal{M}_1 \to f^*\mathcal{M}_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

Выберем теперь открытое подмножество $U \subset \mathbb{A}^d$, такое что все пучки $\mathcal{M}_i$ локально свободны на U. Тогда $f^*\mathcal{M}_i$ локально свободны на $f^{-1}(U)$, значит на $f^{-1}(U)$ имеем $\mathcal{E}xt^{>n-d}(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = 0$. Но так как $f : Z \to \mathbb{A}^d$ — накрытие, то $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, значит $i \leq n - d$. Отсюда получаем $d \leq n - i$, то есть $\dim \operatorname{supp} \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \leq n - i$. $\square$

Определение. Пучок $\mathcal{F}$ называется *пучком k-ых сизигий*, если существует точная последовательность $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \cdots \to \mathcal{E}_k$, в которой все $\mathcal{E}_i$ локально свободны.

Упражнение 14.24. Покажите, что пучок без кручения является пучком первых сизигий.

Лемма 14.25. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок k-ых сизигий. Тогда $\dim S_m(\mathcal{F}) \leq m - k$.*

Доказательство: индукция по k. База — $k = 0$ нам известна. Пусть теперь $k > 0$. Пусть $\mathcal{F}' = \mathrm{Coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{E}_1)$. Тогда $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = \mathcal{E}xt^{i+1}(\mathcal{F}', \mathcal{O})$, поэтому $S_m(\mathcal{F}) = S_{m-1}(\mathcal{F}')$. Но $\mathcal{F}'$ — пучок $(k-1)$-ых сизигий, поэтому по предположению индукции $\dim S_{m-1}(\mathcal{F}') \le (m-1) - (k-1) = m - k$. $\square$

Следствие 14.26. *Если F — пучок без кручения на X, то* $\mathrm{codim}\, S(F) \ge 2$. *В частности, если X — кривая, то F локально свободен.*

Упражнение 14.27. Пусть X — кривая, а E — пучок на X. Покажите, что **(1)** существует единственная т.п. $0 \to T \to E \to F \to 0$, такая что T — пучок кручения, а F — локально свободен; **(2)** $\mathcal{H}om(F, T) \cong T^{\oplus r(F)}$, $\mathcal{E}xt^{>0}(F, T) = 0$; **(3)** $\mathrm{Ext}^{>0}(F, T) = 0$; **(4)** $E \cong F \oplus T$.

Приведем пример не локально свободного пучка без кручения на $\mathbb{P}^2$. Выберем точку $P \in \mathbb{P}^3$ и пусть $E = J_P$. Применим функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O})$ к точной последовательности $0 \to J_P \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$. Получим точную последовательность $0 \to 0 \to \mathcal{O} \to (J_P)^* \to 0 \to 0 \to \mathcal{E}xt^1(J_P, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}_P \to 0$. Значит $(J_P)^* \cong \mathcal{O}$ и $\mathcal{E}xt^1(J_P, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}_P$, то есть J_P не локально свободен.

Лемма 14.28. *Пучок E рефлексивен $\Longleftrightarrow$ E — пучок вторых сизигий.*

Доказательство: ($\Longrightarrow$) Выберем для пучка E^* локально свободную резольвенту $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to E^* \to 0$ и применим двойственность. Получим резольвенту $0 \to E^{**} \to \mathcal{E}_0^* \to \mathcal{E}_1^*$. Но $E \cong E^{**}$, значит E — пучок вторых сизигий.

($\Longleftarrow$) Выберем точную последовательность $0 \to E \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ и дважды дуализируем. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "\mu_E"'] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{E}_2 \arrow[d, "\cong"'] \\
& E^{**} \arrow[r] & \mathcal{E}_1^{**} \arrow[r] & \mathcal{E}_2^{**}
\end{tikzcd}$$

Заметим, что вне множества $S(E)$ морфизм μ_E — изоморфизм, поэтому пучок $\mathrm{Ker}(E^{**} \to \mathcal{E}_1^{**})$ — пучок кручения. Но E^{**} не имеет кручения, значит нижняя строчка точна в E^{**}. По лемме о пяти гомоморфизмах $E \cong E^{**}$. $\square$

Следствие 14.29. *Если F — рефлексивный пучок на X, то* $\mathrm{codim}\, S(F) \ge 3$. *В частности, если X — кривая или поверхность, то F локально свободен.*

Упражнение 14.30. Пусть E — пучок без кручения на поверхности X с $\mathrm{c}_1(E) = 0$. Тогда $E \cong J_Z$, где $Z \subset X$ — нульмерная подсхема.

Приведем пример рефлексивного, но не локально свободного пучка на $\mathbb{P}^3$. Выберем точку $P \in \mathbb{P}^3$ и рассмотрим комплекс Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{A} \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \xrightarrow{B} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0.$$

Пусть $E = \mathrm{Coker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$. По построению E — пучок вторых сизигий, стало быть рефлексивен. Применим функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O})$ к точной последовательности $0 \to \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{A} \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to E \to 0$. Получим точную последовательность $0 \to E^* \to \mathcal{O}(2)^{\oplus 3} \xrightarrow{A^*} \mathcal{O}(3) \to \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}) \to 0$. Легко видеть, что $A^* = B$, поэтому $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}_P(3) \cong \mathcal{O}_P$, значит E не локально свободен.

15. Примеры стабильных расслоений.

15.1. **Двойственность Серра.** Начнем с этой очень важной, хотя и не имеющей прямого отношения к стабильности, темы. Пусть F — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Обозначим $\omega = \mathcal{O}(-n-1)$.

Лемма 15.1. *Спаривание* $\mathrm{Hom}(F,\omega)\times H^n(F)\to H^n(\omega)=\mathbb{C}$ *невырождено.*

Доказательство: пусть $\phi\in\mathrm{Hom}(F,\omega)$. Тогда ϕ индуцирует отображение $H^n(F)\to H^n(\omega)=\mathbb{C}$, как раз дающее спаривание с ϕ. Иначе говоря, получаем морфизм $\mathrm{Hom}(F,\omega)\to H^n(F)^*$. Покажем, что он является изоморфизмом. Во-первых, если $F=\mathcal{O}(k)$, то это легко следует из формулы Ботта. Так как обе части аддитивны по F, отсюда следует утверждения для пучков F, являющихся прямыми суммами линейных. Наконец, произвольный пучок F можно дописать до точной последовательности $\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_0\to F\to 0$, где $\mathcal{E}_i$ — прямые суммы линейных. Отсюда получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F,\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_0,\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & H^n(F)^* \arrow[r] & H^n(\mathcal{E}_0)^* \arrow[r] & H^n(\mathcal{E}_1)^* \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Правая и средняя вертикальные стрелки — изоморфизмы, поэтому и левая стрелка — изоморфизм по лемме о пяти гомоморфизмах. ☐

Следствие 15.2. $\mathrm{Ext}^i(F,\omega)\cong H^{n-i}(F)^*$ *для всех* i.

Доказательство: $\mathrm{Ext}^i(F,\omega)$ — по определению производный функтор от $\mathrm{Hom}(F,\omega)$, а $H^{n-i}(F)^*$ — производный функтор от $H^n(F)^*$. ☐

Теорема 15.3 (Серр). $\mathrm{Ext}^i(F,G\otimes\omega)\cong\mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)^*$ *для всех* F, G *и* i.

Доказательство: Если G — расслоение, то $\mathrm{Ext}^i(F,G\otimes\omega)\cong\mathrm{Ext}^i(F\otimes G^*,\omega)$, а $\mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)\cong\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{O},G^*\otimes F)\cong H^{n-i}(\mathbb{P}^n,F\otimes G^*)$, так что остается применить предыдущее следствие. Пусть теперь $0\to G'\to G\to G''\to 0$ — точная последовательность. Покажем, что если для двух ее членов выполняется утверждение теоремы, то оно выполняется и для третьего члена. Действительно, это следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i(F,G'\otimes\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(F,G\otimes\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(F,G''\otimes\omega) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(G',F)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(G'',F)^* \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

и леммы о пяти гомоморфизмах. Остается для произвольного G выбрать локально свободную резольвенту и разрезать ее на точные тройки. ☐

Напоследок, сформулируем теорему двойственности Серра в общем виде. Пусть X — гладкое проективное многообразие, $\dim X = n$, а $\omega_X=\Lambda^n\Omega_X$. Тогда существует естественный изоморфизм $\mathrm{Ext}^i(F,G\otimes\omega_X)\cong\mathrm{Ext}^{n-i}(G,F)^*$.

15.2. **Стабильность.** Напомним определения стабильности по Мамфорду и по Гизекеру. В их основе лежат понятия наклона пучка $\mu(F)=c_1(F)/r(F)$ и приведенного многочлена Гильберта $p_F(m)=P_F(m)/r(F)$. Пучок E называется стабильным по Мамфорду (по Гизекеру), если для любого подпучка $0\neq F\subset E$ с $r(F)<r(E)$ выполняется неравенство $\mu(F)<\mu(E)$ (соотв.

$p_F < p_E$). Определение полустабильности получается заменой строгих неравенств на нестрогие.

Нестабильными (*unstable*), называются пучки, не являющиеся полустабильными, а не *стабильными* (*nonstable*), называются пучки, не являющиеся стабильными. Следите за пробелами!

Лемма 15.4. *Полустабильный пучок не имеет кручения.*

Доказательство: Пусть $T_E \neq 0$. Так как $r(T_E) = 0$, то $\mu(T_E) = \infty > \mu(E)$, что противоречит полустабильности пучка E. $\square$

Пусть M_P^{Ms}, M_P^{Mss}, M_P^{Gs} и M_P^{Gss} — множества стабильных (полусатбильных) по Мамфорду (Гизекеру) пучков с многочленом Гильберта P.

Лемма 15.5. *Имеем включения $M_P^{Ms} \subset M_P^{Gs} \subset M_P^{Gss} \subset M_P^{Mss}$. Если $c_1(E)$ и $r(E)$ взаимно просты, то все эти включения — равенства.*

Доказательство: Заметим, что $p_F(m) - p_E(m) = (\mu(F) - \mu(E))\frac{m^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$, поэтому $\mu(F) > \mu(E)$ влечет $p_F > p_E$, а $p_F \geq p_E$ влечет $\mu(F) \geq \mu(E)$. Отсюда получаем первое и третье включение. Второе включение очевидно. Пусть теперь $c_1(E)$ и $r(E)$ взаимно просты и E полустабилен. Если E не стабилен, то существует $F \subset E$, такой что $p_F = p_E$. Значит $\mu(F) = \mu(E)$, то есть $c_1(F)/r(F) = c_1(E)/r(E)$, что невозможно при $0 < r(F) < r(E)$. Значит E стабилен, то есть $M_P^{Gss} \subset M_P^{Gs}$. $\square$

Лемма 15.6. *Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность. Тогда $\min\{\mu(E_1), \mu(E_2)\} \leq \mu(E) \leq \max\{\mu(E_1), \mu(E_2)\}$, и равенство возможно только если $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. То же выполняется, если μ заменить на p.*

Доказательство: $c_1(E) = c_1(E_1)+c_1(E_2)$, $r(E) = r(E_1)+r(E_2)$, поэтому $\mu(E)$ — средне-взвешенное от $\mu(E_1)$ и $\mu(E_2)$ с весами $r(E_1)$ и $r(E_2)$ соответственно. Аналогично для p. $\square$

Следствие 15.7. *Прямая сумма пучков E_1 и E_2 никогда не стабильна, а полустабильна тогда и только тогда, когда $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ (соотв. $p(E_1) = p(E_2)$) и пучки E_i полустабильны.*

Доказательство: Проверим ($\Longleftarrow$), так как остальное очевидно. Пусть $F \subset E$ — подпучок. Положим $F_1 = \mathrm{Ker}(F \to E \to E_2)$, $F_2 = \mathrm{Im}(F \to E \to E_2)$. Тогда $0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0$ и $F_1 \subset E_1$, $F_2 \subset E_2$, так что $\mu(F_i) \leq \mu(E_i) = \mu(E)$, поэтому $\mu(F) \leq \mu(E)$. $\square$

Упражнение 15.8. Докажите, что расширение полустабильных пучков одинакового наклона полустабильно.

Определение. Пучок E — *нормализован*, если $-r(E) < c_1(E) \leq 0$.

Ясно, что любой пучок становится нормализованным после подходящей (и однозначно определенной) подкрутки. У нормализованного пучка наклон находится в полуинтервале $(-1, 0]$.

Лемма 15.9. *Пучок E (полу)стабилен $\Longleftrightarrow$ пучок $E(k)$ (полу)стабилен.*

Доказательство: Заметим, что $\mu(F(k)) = \mu(F) + k$, $p_{F(k)}(m) = p_F(m + k)$, поэтому подпучок F дестабилизирует $E \Longleftrightarrow F(k)$ дестабилизирует $E(k)$. $\square$

Лемма 15.10. *При проверке (полу)стабильности пучка без кручения E достаточно рассматривать только такие подпучки $F \subset E$, что E/F не имеет кручения.*

Доказательство: Пусть $F \subset E$ — подпучок, такой что $p_F \geq p_E$. Обозначим $Q = E/F$. Пусть $F' = \mathrm{Ker}(E \to Q \to F_Q)$. Тогда E/F' не имеет кручения, так что надо проверить, что $p_{F'} \geq p_F$. По построению имеем точную последовательность $0 \to F \to F' \to T_Q \to 0$. Значит $r(F) = r(F')$, так что достаточно проверить, что $P_{F'} \geq P_F$. Но $P_{F'} - P_F = P_{T_Q} \geq 0$. □

Лемма 15.11. *Пусть E — нормализованное расслоение ранга 2.*
(i) E — стабильно $\iff H^0(E) = 0$.
(ii) Если $c_1(E) = 0$, то E полусатбильно $\iff H^0(E(-1)) = 0$.

Доказательство: (i) $(\Longleftarrow)$ Пусть $F \subset E$ — дестабилизирующий подпучок. Согласно лемме 15.10 можно считать, что E/F не имеет кручения. Так как пучки без кручении — пучки первых сизигий, то F — пучок вторых сизигий, то есть F рефлексивен. Но $0 < r(F) < 2$, значит $r(F) = 1$, значит F локально свободен, то есть $F = \mathcal{O}(k)$. Так как $\mu(E) \in (-1; 0]$, то $k \geq 0$. Вложение $F \subset E$ дает элемент в $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(k), E) = H^0(E(-k))$, но при $k \geq 0$ $H^0(E(-k)) \subset H^0(E)$.

(i) $(\Longrightarrow)$ Если $H^0(E) \neq 0$, то существует морфизм $\mathcal{O} \to E$. Так как E не имеет кручения, его ранг равен 1, то есть ядро имеет ранг 0. Так как $\mathcal{O}$ не имеет кручения, ядро равно нулю, значит этот морфизм — вложение и так как $\mu(\mathcal{O}) = 0 \geq \mu(E)$, то $\mathcal{O} \subset E$ — дестабилизирующий подпучок.

(ii) доказывается аналогично. □

Следствие 15.12 (Шварценбергер)**.** *Если E — стабильное расслоение на $\mathbb{P}^2$ ранга 2, то $\Delta_E := \mathrm{c}_1^2 - 4\,\mathrm{c}_2 < 0$, а если E — полустабильно, то $\Delta_E \leq 0$.*

Доказательство: так как дискриминант не меняется при подкрутке, можно считать, что E нормализовано. Тогда $H^0(E) = 0$. Более того, E^* тоже полустабильно, поэтому, пользуясь двойственностью Серра, получаем $H^2(E) \cong H^0(E^*(-3)) = 0$. Значит $\chi(E) = -\dim H^1(E) \leq 0$. Но по теоереме Римана–Роха $\chi(E) = \binom{x_1+2}{2} + \binom{x_2+2}{2} = [(x_1^2+x_2^2)+3(x_1+x_2)+4]/2 = [\mathrm{c}_1^2 + 3\,\mathrm{c}_1 - 2\,\mathrm{c}_2 + 4]/2$. Если $\mathrm{c}_1 = 0$, то $\chi(E) = 2 - \mathrm{c}_2 \leq 0$, значит $\mathrm{c}_2 \geq 2$ и $\Delta_E = -4\,\mathrm{c}_2 < 0$. Если же $\mathrm{c}_1 = -1$, то $\chi(E) = 1 - \mathrm{c}_2 \leq 0$, значит $\mathrm{c}_2 \geq 1$ и $\Delta_E = 1 - 4\,\mathrm{c}_2 < 0$. □

Изучим известные нам примеры расслоений на предмет стабильности.

Теорема 15.13. *Расслоение N нулевой корреляции на $\mathbb{P}^3$ стабильно.*

Доказательство: так как $r(N) = 2$, $\mathrm{c}_1(N) = 0$, согласно лемме 15.11 достаточно проверить, что $H^0(\mathbb{P}^3, N) = 0$. Но по определению расслоения N имеем точную последовательность $0 \to N \to T(-1) \to \mathcal{O}(1) \to 0$, а отображение $V = H^0(\mathbb{P}^3, T(-1)) \to H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1)) = V^*$ задается невырожденной симплектической формой, поэтому $H^\bullet(\mathbb{P}^3, N) = 0$. □

Упражнение 15.14. Покажите, что **(1)** $H^i(\mathbb{P}^3, N(-1)) = \mathbb{C}$ при $i = 1$ и 0 при $i \neq 1$; **(2)** $H^i(\mathbb{P}^3, N(-2)) = \mathbb{C}$ при $i = 2$ и 0 при $i \neq 2$; **(3)** расслоение $N_{|\mathbb{P}^2}$ полустабильно, но не стабильно для любой плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$.

Упражнение 15.15. Пусть E — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, соответствующее локально полному пересечению коразмерности 2 $Y \subset \mathbb{P}^n$ с $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_Y(k)$. **(1)** E стабильно $\iff k > 0$ и Y не лежит в гиперповерхности степени $\le k/2$. **(2)** если k четно, то E полустабильно $\iff k \ge 0$ и Y не лежит в гиперповерхности степени $\le (k/2) - 1$.

Упражнение 15.16. Пусть E — нормализованное расслоение ранга 3. Покажите, что **(1)** при $\mathrm{c}_1(E) = -1$ или -2, E стабильно $\iff H^0(E) = H^0(E^*(-1)) = 0$; **(2)** при $\mathrm{c}_1(E) = 0$, E стабильно $\iff H^0(E) = H^0(E^*) = 0$; **(3)** при $\mathrm{c}_1(E) = 0$, E полустабильно $\iff H^0(E(-1)) = H^0(E^*(-1)) = 0$.

Проверим, напоследок, стабильность касательного расслоения к $\mathbb{P}^n$. Для удобства будем проверять стабильность расслоения $\Omega^1(1)$. Для него $\mathrm{c}_1 = -1$, $r = n$, так что $\mu = -1/n$. Пусть $F \subset \Omega^1(1)$ — дестабилизирующий подпучок, такой что факторпучок не имеет кручения. Так как $\Omega^1(1) \subset \mathcal{O}^{n+1}$, то F — подпучок в $\mathcal{O}^{n+1}$, причем легко видеть, что $Q = \mathcal{O}^{n+1}/F$ — тоже пучок без кручения (проверьте это!). Если $\mathrm{c}_1(F) < 0$, то так как $r(F) \le n-1$, то $\mu(F) \le -1/r \le -1/(n-1) < -1/n$, значит $\mathrm{c}_1(F) \ge 0$, а $\mathrm{c}_1(Q) \le 0$.

Лемма 15.17. *Пусть Q — глобально порожденный пучок без кручения на $\mathbb{P}^n$ с $\mathrm{c}_1(Q) \le 0$. Тогда $Q \cong \mathcal{O}^r$.*

Доказательство: Пусть $r = r(Q)$. Выберем точку, в которой Q локально свободен, и выберем r глобальных сечений, которые в этой точке дают базис слоя Q. Получим морфизм $\phi : \mathcal{O}^r \to Q$. В данной точке он изоморфизм, поэтому $\operatorname{Ker} \phi = 0$, т.е. получаем точную последовательность $0 \to \mathcal{O}^r \to Q \to T \to 0$, где T — пучок кручения, причем $\mathrm{c}_1(T) = \mathrm{c}_1(Q) \le 0$. Но по тоереме Римана–Роха $P_T(m) = \mathrm{c}_1(T)m^{n-1}/(n-1)! + \dots$, значит $\mathrm{c}_1(T) = 0$ и $\operatorname{codim}\operatorname{supp}(T) \ge 2$. Но по двойственности Серра $\operatorname{Ext}^1(T, \mathcal{O}) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^n, T(-n-1))^*$, что равно нулю, т.к. $\dim \operatorname{supp} T \le n-2$. Значит последовательность расщепляется, то есть $T \subset Q$, то есть $T = 0$, так как Q не имеет кручения, и $Q = \mathcal{O}^r$. $\square$

Итак, $\mathcal{O}^{n+1}/F \cong \mathcal{O}^r$, значит $F \cong \mathcal{O}^{n+1-r}$, но $H^0(\Omega(1)) = 0$, значит $F = 0$.

15.3. **Фильтрация Хардера-Нарасимхана.** Удобно считать пучки кручения полустабильными с бесконечным приведенным многочленом Гильберта.

Теорема 15.18 (Хардер–Нарасимхан). *Пусть E — когерентный пучок. Существует единственная фильтрация $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{m-1} \subset E_m = E$ т.ч. E_i/E_{i-1} — полустабильные пучки, причем последовательность наклонов $p_i = p_{E_i/E_{i+1}}$ строго убывает $p_1 > p_2 > \dots > p_m$.*

Эта фильтрация называется фильтрацией Хардера–Нарасимхана. Доказательство разобьем на несколько шагов.

Назовем подпучок $F \subset E$ максимальным, если он не содержится ни в каком подпучке $F' \subset E$ с $p_{F'} \ge p_F$. Так как категория когерентных пучков нетерова, всякий подпучок содержится в максимальном подпучке с не меньшим наклоном. Хотя, конечно, максимальных подпучков может быть несколько.

Лемма 15.19. *Пусть $F \subset E$ — максимальный подпучок. Если $G \subset E$, причем $p_G \ge p_F$ и $G \not\subset F$, то $p_{F \cap G} > p_G$.*

Доказательство: Рассмотрим подпучок $F + G = \operatorname{Im}(F \oplus G \to E) \subset E$. Так как $G \not\subset F$, то $F \subsetneq F + G$, поэтому в силу максимальности F имеем $p_{F+G} < p_F$.

Значит $p_{(F+G)/F} < p_F$. Но $(F+G)/F \cong G/(F \cap G)$, значит $p_{G/(F\cap G)} < p_F \leq p_G$, следовательно $p_{F\cap G} < p_G$. $\square$

Пусть теперь $F \subset E$ — **максимальный** подпучок **минимального** ранга.

Лемма 15.20. *Пучок F не содержит подпучков $G \subset F$ с $p_G > p_F$.*

Доказательство: Пусть $G' \subset F$ — максимальный в F, содержащий G, а $G'' \subset E$ — максимальный в E, содержащий G'. Если $G'' \subset F$, то $r(G'') < r(F)$ (если $r(G'') = r(F)$, то $p_{G''} \leq p_F$ — противоречие с $p_{G''} \geq p_{G'} \geq p_G > p_F$), что противоречит минимальности $r(F)$ среди максимальных подпучков! Значит $G'' \not\subset F$. Тогда $p_{F\cap G''} > p_{G''} \geq p_{G'}$ противоречит максимальности G' в F. $\square$

Доказательство существования: индукция по $r(E)$. Пусть $E_1 \subset E$ — **максимальный** подпучок **минимального** ранга. Тогда E_1 полустабилен. Положим $E' = E/E_1$. Тогда E' — пучок без кручения (иначе положим $E'_1 = \mathrm{Ker}(E \to E' \to E'/T_{E'})$ и получим $p_{E'_1} \geq p_{E_1}$, так что E_1 не максимален). По индукции пучок E' обладает фильтрацией Хардера–Нарасимхана $0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_m = E'$. Положим $E_i = \mathrm{Ker}(E \to E' \to E'/E'_{i-1})$. Тогда $E_{i+1}/E_i \cong E'_i/E'_{i-1}$ полустабилен, так что остается проверить, что $p_{E_1} > p_{E_2/E_1}$. Но если $p_{E_1} \leq p_{E_2/E_1}$, то $p_{E_1} \leq p_{E_2}$, что противоречит максимальности пучка E_1. $\square$

Осталось доказать единственность. Пусть $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{m-1} \subset E_m = E$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана. Положим $p_{max}(E) = p_{E_1}$, $p_{min}(E) = p_{E_m/E_{m-1}}$.

Лемма 15.21. *Если E и F полустабильны и $p_E > p_F$, то* $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$.

Доказательство: пусть $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(E, F)$. Так как F полустабилен, $p_{\mathrm{Im}\, f} \leq p_F < p_E$, значит $p_E < p_{\mathrm{Ker}\, f}$, что противоречит полустабильности E. $\square$

Лемма 15.22. *Если $p_{min}(E) > p_{max}(F)$, то* $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$.

Доказательство: Пусть $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = F$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана. Применим индукцию по $m + l$. Если $m = l = 0$ доказывать нечего. Пусть теперь $m > 0$ и пусть $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(E, F)$. Рассмотрим композицию $E_1 \to E \to F \to F/F_{l-1}$. Согласно лемме 15.21 она равна нулю, поэтому $f(E_1) \subset F_{l-1}$. Рассмотрим композицию $E_1 \to F_{l-1} \to F_{l-1}/F_{l-2}$. Согласно лемме 15.21 она равна нулю, поэтому $f(E_1) \subset F_{l-2}$. Продолжая так же, получаем $f(E_1) = 0$. Значит f пропускается через $f' : E/E_1 \to F$. Применяя к f' предположение индукции, получаем $f' = 0$, а значит и $f = 0$. $\square$

Пусть $E_\bullet$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана на пучке E, а p — приведенный многочлен Гильберта (т.е. многочлен с рациональными коэффициентами степени $n = \dim X$ и старшим коэффициентом $h^n/n!$). Обозначим $E_p = E_k$, где $k = \max\{i \mid p_{E_i/E_{i-1}} \geq p\}$; и $\mathsf{gr}_p^{HN}(E) = E_k/E_{k-1}$, если $p_{E_k/E_{k-1}} = p$.

Лемма 15.23. *Пусть $f : E \to F$ — морфизм. Тогда $p(E_p) \subset F_p$ для всех p.*

Доказательство: Рассмотрим композицию $f' : E_p \to E \to F \to F/F_p$. Ясно, что $p_{max}(E_p) \geq p > p_{min}(F/F_p)$, значит $f' = 0$, то есть $f(E_p) \subset F_p$. $\square$

Доказательство единственности: Пусть $E'_\bullet$ — другая фильтрация Хардера–Нарасимхана. Рассмотрим тождественный морфизм $\mathrm{id} : E \to E$. Тогда $E_p = \mathrm{id}(E_p) \subset E'_p$. Аналогично $E'_p \subset E_p$. Значит $E_p = E'_p$ и фильтрации совпадают. $\square$

16. Характер расщепления стабильных расслоений.

Пусть E — расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, а $\mathbb{G}_n = \mathrm{Gr}(2, V)$ — грассманиан прямых в $\mathbb{P}^n$. Напомним, что для каждой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ определен тип расщепления $a^E(L) = (a_1^E(L), \dots, a_r^E(L)) \in \mathbb{Z}^r$ — невозрастающий набор целых чисел, такой что $E_{|L} = \mathcal{O}_L(a_1^E(L)) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_L(a_r^E(L))$. На множестве $\mathbb{Z}^r$ вводится лексикографический порядок и $\underline{a}^E := \min\{a^E(L) \mid L \in \mathbb{G}_n\}$ называется общим типом расщепления. Существует непустое открытое подмножество $U_E \subset \mathbb{G}_n$ такое что для всех $L \in U_E$ имеем $a^E(L) = \underline{a}^E$, а для $L \notin U_E$ имеем $a^E(L) > \underline{a}^E$.

Пусть $\mathbb{F}_n = \{(x, L) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}_n \mid x \in L\}$ — многообразие флагов. Обозначим через $p : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^n$ и $q : \mathbb{F}_n \to \mathbb{G}_n$ — проекции. Рассмотрим $V_E := p(q^{-1}(U_E)) \subset \mathbb{P}^n$ — множество точек $x \in \mathbb{P}^n$, через которые проходит хотя бы одна прямая с общим типом расщепления. Оно очевидно открыто в $\mathbb{P}^n$.

Теорема 16.1. *Пусть $\underline{a}^E = (a_1, \dots, a_r)$ — общий тип расщепления расслоения E ранга r на $\mathbb{P}^n$. Если $a_s - a_{s+1} \ge 2$ для какого-то $1 \le s \le r-1$, то существует подпучок $F \subset E$, такой что на V_E он является подрасслоением в E и для любой $L \in U_E$ имеем $F_{|L} \cong \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_L(a_s)$.*

Доказательство этой теоремы довольно длинное — разобъем его на несколько шагов. Во-первых, подкручивая при необходимости E, можно считать, что $a_1 \ge \dots \ge a_s = 0$ и $-2 \ge a_{s+1} \ge \dots \ge a_r$.

Обозначим $\widetilde{U}_E = q^{-1}(U_E) \subset \mathbb{F}_n$, а для каждой точки $L \in \mathbb{G}_n$ обозначим $\widetilde{L} = q^{-1}(L)$. Тогда $\widetilde{U}_E \subset \mathbb{F}_n$ — открытое подмножество, а $\widetilde{L}$ отождествляется проекцией p с прямой $L \subset \mathbb{P}^n$. Рассмотрим расслоение p^*E на $\mathbb{F}_n$, морфизм $\phi : q^*q_*p^*E \to p^*E$. и его образ $\tilde{F} = \operatorname{Im}\phi \subset E$.

Лемма 16.2. *На множестве $\widetilde{U}_E$ морфизм ϕ является морфизмом расслоений ранга s. Его образ $\tilde{F}$ при ограничении на прямую $\widetilde{L} = q^{-1}(L)$, $L \in U_E$, равен подрасслоению $\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s) \subset \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_r)$.*

Доказательство: $q^*q_*p^*E_{|\widetilde{U}_E} = q^*q_*(p^*E_{|\widetilde{U}_E})$. по теореме о плоской замене базы. Кроме того, $\forall L \in U_E$ размерности пространств $H^i(q^{-1}(L), p^*E_{|q^{-1}(L)})$ постоянны (они зависят только от $a^E(L) = \underline{a}^E$), поэтому по теореме о полунепрерывности $q_*(p^*E_{|\widetilde{U}_E})$ — расслоение, а его слой в точке $L \in U_E$ равен

$$H^0(\widetilde{L}, p^*E_{|\widetilde{L}}) = H^0(\widetilde{L}, \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_r)) = H^0(\widetilde{L}, \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s)).$$

Так как расслоение $\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s)$ порождается глобальными сечениями, заключаем, что $\tilde{F}_{|\widetilde{L}} = \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_s) \subset p^*E_{|\widetilde{L}}$. В частности, $\tilde{F}_{|\widetilde{U}_E}$ является подрасслоением ранга s в $p^*E_{|\widetilde{U}_E}$. $\square$

Обозначим $\tilde{Q} = p^*E/\tilde{F}$. Обозначим через $X = \mathbb{F}_n \setminus S(\tilde{Q}) \subset \mathbb{F}_n$ — открытое подмножество, на котором пучок $\tilde{Q}$ локально свободен (и стало быть $\tilde{F}$ является подрасслоением в p^*E). Ясно, что $\widetilde{U}_E \subset X$. Обозначим $Y = p(X) \subset \mathbb{P}^n$. Ясно, что Y открыто в $\mathbb{P}^n$ и $V_E \subset Y$. Заметим также, что $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \ge 2$. Действительно, V_E, а значит и Y содержит прямую, а если $\operatorname{codim}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \le 1$, то $\mathbb{P}^n \setminus Y$ пересекалось бы с любой прямой в $\mathbb{P}^n$.

Для каждой точки $y \in Y$ слой $X \cap p^{-1}(y)$ является непустым открытым подмножеством в $p^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, в частности $X \cap p^{-1}(y)$ связно. Поэтому естественный морфизм $T_X \to p^*T_Y$ — сюръекция (иначе говоря $p : X \to Y$

— субмерсия) со связными слоями. Наша следующая цель — показать, что существует расслоения F' на Y, такое что $\tilde{F}_{|X} \cong p^*F'$. Для этого нам понадобится следующая лемма о спуске. Обозначим $T_{X/Y} := \operatorname{Ker}(T_X \to p^*T_Y)$ — отнсительное касательное расслоение.

Лемма 16.3. *Пусть $p : X \to Y$ — субмерсия со связными слоями, E — расслоение на Y, а $\tilde{F} \subset p^*E$ — подрасслоение. Если $\operatorname{Hom}(T_{X/Y}, \mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})) = 0$, то существует подрасслоение $F \subset E$ на Y, такое что $\tilde{F} = p^*F$.*

Доказательство: Пусть $r(\tilde{F}) = s$. Рассмотрим относительный грассманиан $\mathrm{Gr}_Y(s, E)$. Это многообразие, склеенное из произведений $U_i \times \mathrm{Gr}(s, r)$, (здесь $\{U_i\}$ — тривиализующее покрытие для расслоения E, а $r = r(E)$) с помощью коцикла, задающего расслоение E в покрытии $\{U_i\}$, аналогично тому, как проективизация $\mathbb{P}_Y(E)$ склеивается из произведений $U_i \times \mathbb{P}^{r-1}$. По определению имеем проекцию $\pi : \mathrm{Gr}_Y(s, E) \to Y$, слой которой над точкой $y \in Y$ — это грассманиан $\mathrm{Gr}(s, E_y)$. Кроме того, расслоение π^*E на $\mathrm{Gr}_Y(s, E)$ содержит тавтологическое подрасслоение $\mathcal{S} \subset \pi^*E$ ранга s, которое склеивается из тавтологических подрасслоений на $\mathrm{Gr}(s, r)$, поднятых на $U_i \times \mathrm{Gr}(s, r)$. В случае $s = 1$ тавтологическое подрасслоение совпадает с линейным расслоением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y(E)/Y}(-1)$. Если $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ — сечение проекции π (то есть $\pi \circ f = \mathrm{id}_Y$), то $f^*\mathcal{S} \subset f^*\pi^*E = E$ — подрасслоение ранга s. Обратно, если $F \subset E$ — подрасслоение ранга s, то отображение $Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$, $y \mapsto F_y \in \mathrm{Gr}(s, E_y)$ является сечением проекции π. Легко видеть, что тем самым возникает биекция между множеством всех подрасслоений $F \subset E$ ранга s и сечений $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ проекции π.

Упражнение 16.4. Покажите, что $\mathrm{Gr}_Y(s, E)$ представляет функтор, сопоставляющий схеме S множество всех пар (ξ, F), где $\xi : S \to Y$ — морфизм, а $F \subset \xi^*E$ — подрасслоение ранга s. Что будет “универсальным объектом”?

Итак, чтобы получить подрасслоение $F \subset E$, нам надо построить сечение $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ проекции $\pi : \mathrm{Gr}_Y(s, E) \to Y$. При этом нам дано подрасслоение $\tilde{F} \subset p^*E$, то есть сечение $\tilde{f} : X \to \mathrm{Gr}_X(s, p^*E)$ проекции $\tilde{\pi} : \mathrm{Gr}_X(s, p^*E) \to X$. Заметим, что условие $\tilde{F} = p^*F$ равносильно условию $\tilde{p} \circ \tilde{f} = f \circ p$, где $\tilde{p} : \mathrm{Gr}_X(s, p^*E) \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ — естественная проекция

Упражнение 16.5. Покажите, что $\mathrm{Gr}_X(s, p^*E) \cong \mathrm{Gr}_Y(s, E) \times_Y X$ и $p \circ \tilde{\pi} = \pi \circ \tilde{p}$. Проверьте, что $\tilde{p}^*\mathcal{S} \subset \tilde{p}^*\pi^*E = \tilde{\pi}^*p^*E$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}_X(s, p^*E)$.

Таким образом, нам дан морфизм $f' = \tilde{p} \circ \tilde{f} : X \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$, такой что $\pi \circ f' = \pi \circ \tilde{p} \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\pi} \circ \tilde{f} = p$, и нам надо показать, что $f' = f \circ p$ для некоторого $f : Y \to \mathrm{Gr}_Y(s, E)$ (заметим, что тогда $\pi \circ f \circ p = \pi \circ f' = p$, поэтому в силу сюръективности p автоматически получаем $\pi \circ f = \mathrm{id}_Y$).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{Gr}_Y(s, E) \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y \arrow[ur, dotted, "f"] & \end{tikzcd}$$

Ясно, что такое отображение f возникает тогда и только тогда, когда отображение f' постоянно на слоях морфизма p. А для проверки того, что f' постоянно на слоях, достаточно проверить, что дифференциал f' вдоль слоев равен нулю (так как слои связны!). Но дифференциал вдоль слоев — это отображение $d_{X/Y}f' : T_{X/Y} \to f'^* T_{\mathrm{Gr}_Y(s,E)/Y}$, поэтому, ввиду изоморфизма

$$f'^*\,\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \pi^*E/\mathcal{S}) \cong \mathcal{H}om(f'^*\mathcal{S}, f'^*\pi^*E/f'^*\mathcal{S}) \cong \mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})$$

(т.к. $\tilde{p}^*\mathcal{S} \subset \tilde{p}^*\pi^*E = \tilde{\pi}^*p^*E$ — тавтологическое расслоение на грассманиане $\mathrm{Gr}_X(s, p^*E)$, то $f'^*\mathcal{S} = \tilde{f}^*\tilde{p}^*\mathcal{S} = \tilde{F}$) остается воспользоваться леммой. □

Лемма 16.6. *Относительное касательное расслоение $T_{\mathrm{Gr}_Y(s,E)/Y}$ изоморфно расслоению $\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \pi^*E/\mathcal{S})$.*

Доказательство: На произведении $U_i \times \mathrm{Gr}(s,r)$ имеем естественный изоморфизм $T_{U_i\times\mathrm{Gr}(s,r)} \cong T_{U_i} \oplus T_{\mathrm{Gr}(s,r)}$. Кроме того, $T_{\mathrm{Gr}(s,r)} = \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{O}^r/\mathcal{S})$, где $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}^r$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(s,r)$. Запишем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{O}^r/\mathcal{S}) \to T_{U_i\times\mathrm{Gr}(s,r)} \to T_{U_i} \to 0.$$

Ясно, что при склеивании $\mathrm{Gr}_Y(s,E)$ из $U_i \times \mathrm{Gr}(s,r)$, такие последовательности склеиваются в последовательность

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \pi^*E/\mathcal{S}) \to T_{\mathrm{Gr}_Y(s,E)} \to \pi^*T_Y \to 0,$$

которая и дает искомый изоморфизм. □

Чтобы применить лемму 16.3 в нашей ситуации, надо описать $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n}$ и $\mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})$. Для описания $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n}$ полезно следующее утверждение.

Упражнение 16.7. $\mathbb{F}_n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(V\otimes\mathcal{O}/\mathcal{O}(-1))$. При этом расслоение Гротендика $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(V\otimes\mathcal{O}/\mathcal{O}(-1))/\mathbb{P}(V)}(-1)$ изоморфно расслоению $q^*\mathcal{L}/p^*\mathcal{O}(-1)$. В частности $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}(V)} \cong \mathcal{H}om(q^*\mathcal{L}/p^*\mathcal{O}(-1), V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/q^*\mathcal{L})$.

Лемма 16.8. *Ограничение расслоения $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n}$ на прямую $\widetilde{L} = q^{-1}(L)$ изоморфно расслоению $V/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1)$.*

Доказательство: Ясно, что расслоение $q^*\mathcal{L}_{|\widetilde{L}}$ изоморфно расслоению $L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}$, а $p^*\mathcal{O}(-1) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1)$. Поэтому $q^*\mathcal{L}/p^*\mathcal{O}(-1) = L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}/\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(1)$, а $(V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/q^*\mathcal{L})_{|\widetilde{L}} = V\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}} \cong (V/L)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}$. Окончательно получаем $T_{\mathbb{F}_n/\mathbb{P}^n|\widetilde{L}} \cong \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(1), V/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}) \cong V/L\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-1)$. □

Лемма 16.9. *Если $L \in U_E$, то $\mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})_{|\widetilde{L}} \cong \oplus_{k\le s, l\ge s+1}\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_l - a_k)$.*

Доказательство: $\tilde{F}_{|\widetilde{L}} \cong \oplus_{k\le s}\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_k)$, а $(p^*E/\tilde{F})_{|\widetilde{L}} \cong \oplus_{l\ge s+1}\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_k)$. □

Заметим теперь, что при $l \ge s+1$, $k \le s$ имеем $a_l - a_k \le -2$, поэтому всякий морфизм $T_{X/Y} \to \mathcal{H}om(\tilde{F}, p^*E/\tilde{F})$ равен нулю на каждой из прямых $\widetilde{L}$, а значит равен нулю на $q^{-1}(U_E)$, а значит и на X, так как $q^{-1}(U_E)$ плотно в X. Значит $\tilde{F}_{|X} \cong p^*F'$, где F' — подрасслоение в $E_{|Y}$. Остается продолжить подрасслоение $F' \subset E_{|Y}$ до подпучка на всем $\mathbb{P}^n$. Мы покажем, что в качестве продолжения можно взять пучок $F = j_*F'$, где $j : Y \to \mathbb{P}^n$ — вложение.

Лемма 16.10. *Для любого пучка G на Y имеем $j^*j_*G \cong G$.*

Доказательство: По определению, если $U \subset Y$ — открытое аффинное, то $j(U) = U$ и $(j^*j_*G)(U) = (j_*G)(j(U)) \otimes_{\mathcal{O}(j(U))} \mathcal{O}(U) = (j_*G)(j(U)) = G(U)$. □

Лемма 16.11. *Имеем изоморфизмы $j_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, $j_*j^*E \cong E$.*

Доказательство: По определению, сечения пучка $j_*\mathcal{O}_Y$ над открытым множеством $U \subset \mathbb{P}^n$ — это функции на $Y \cap U$. Но $\operatorname{codim}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \geq 2$, поэтому всякая функция на $Y \cap U$ продолжается на U. Далее, заметим, что $(j_*j^*E)(U) = j^*E(Y \cap U) = E(Y \cap U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(Y \cap U) = E(Y \cap U)$, поэтому естественный морфизм $E \to j_*j^*E$ над открытым подмножеством $U \subset \mathbb{P}^n$ есть морфизм ограничения $E(U) \to E(Y \cap U)$. Так как локально сечение расслоения — это набор функций, а функции можно продолжать, то морфизм $E \to j_*j^*E$ сюръективен. Кроме того, он инъективен, так как E не имеет кручения. $\square$

Итак, $F' \subset E_{|Y} = j^*E$, значит $F := j_*F' \subset j_*j^*E \cong E$, причем имеем $j^*F = j^*j_*F' \cong F'$ поэтому F — искомый подпучок. Теорема доказана.

Укажем вначале применения этой теоремы к равномерным расслоениям.

Упражнение 16.12. **(1)** Если E — равномерное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга r и типа $\underline{a}^E = (a_1, \ldots, a_r)$ и $a_s - a_{s+1} \geq 2$, то E — расширение равномерных расслоений типа $(a_1, \ldots, a_s)$ и $(a_{s+1}, \ldots, a_r)$. **(2)** Если E — неразложимое равномерное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга n, то $a_s - a_{s+1} \leq 1$ для всех $1 \leq s \leq n-1$, где $\underline{a}^E = (a_1, \ldots, a_n)$ — тип расслоения E. **(3)*** Если E — неразложимое равномерное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$, то $E \cong T(a)$.

Теперь применим нашу теорему к полустабильным расслоениям.

Следствие 16.13. *Если E — полустабильное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга r, с общим типом расщепления $(a_1, \ldots, a_r)$, то $a_s - a_{s+1} \leq 1$ для всех $1 \leq s \leq r-1$.*

Доказательство: пусть $a_s - a_{s+1} \geq 2$. Построим подпучок F как в теореме. В силу функториальности классов Чженя имеем $c_1(F) = c_1(F_{|L}) = a_1 + \cdots + a_s$, поэтому $\mu(F) \geq (a_1 + \cdots + a_s)/s > (a_1 + \cdots + a_r)/r = c_1(E)/r = \mu(E)$. $\square$

Следствие 16.14 (Грауэрт–Мюлих). *Если E — полустабильное нормализованное расслоение на $\mathbb{P}^n$ ранга 2, то $\underline{a}^E = (0, 0)$ или $\underline{a}^E = (0, -1)$.*

При этом можно достаточно явно описать, что представляет собой множество $S_E \subset \mathbb{G}_n$ прямых подскока расслоения E.

Лемма 16.15. *Множество S_E является дивизором степени $\mathrm{c}_2(E)$ в $\mathbb{G}_n$.*

Доказательство: Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Тогда $\mathbb{G}_2 \cong \mathbb{P}^2$, а $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_2$ — дивизор степени $(1,1)$, так что имеем точную последовательноть $0 \to \mathcal{O}(-1,-1) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_2} \to 0$, где $i : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_2$ — вложение. Пусть $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — проекции $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_2$ на сомножители, так что $p = \tilde{p} \circ i$, $q = \tilde{q} \circ i$. Значит $q_*p^*(E(-1)) \cong \tilde{q}_*i_*i^*\tilde{p}^*(E(-1)) \cong \tilde{q}_*(\tilde{p}^*E(-1) \otimes i_*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_2})$. Заметим, что по теореме о плоской замене базы $R^i\tilde{q}_*(\tilde{p}^*E(-1)) = H^i(E(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}$, $R^i\tilde{q}_*(\tilde{p}^*E(-1) \otimes \mathcal{O}(-1,-1)) = H^i(E(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}(-1)$. Пользуясь полустабильностью E и двойственностью Серра получаем $H^0(E(-1)) = H^0(E(-2)) = 0$, $H^2(E(-1)) = H^2(E(-2)) = 0$, откуда получаем точную последовательность

$$0 \to q_*p^*(E(-1)) \to H^1(E(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}(-1) \to H^1(E(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2} \to R^1q_*p^*(E(-1)) \to 0.$$

Заметим, что $q_*p^*E(-1)$ равно нулю на U_E, а пучок $H^1(E(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}_2}(-1)$ не имеет кручения, поэтому $q_*p^*E(-1) = 0$. Кроме того, легко видеть, что $\operatorname{supp}(R^1q_*p^*(E(-1))) = S_E$, так что остается найти $\mathrm{c}_1(R^1q_*p^*(E(-1)))$. Из точной последовательности видно, что он равен $\dim H^1(E(-2)) = -\chi(E(-2)) = -x(x-1)/2 - y(y-1)/2 = xy - (x+y)(x+y-1)/2$, где x, y — корни Чженя расслоения E. Но $x + y = \mathrm{c}_1(E) = 0$, поэтому получается $xy = \mathrm{c}_2(E)$, что и требовалось. Пусть теперь $n \geq 2$. Выберем общую $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$. Тогда $\mathbb{G}_2 \subset \mathbb{G}_n$ и $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_n$. Ясно, что $S_E \cap \mathbb{G}_2 = S_{E_{|\mathbb{P}^2}}$, откуда все и следует. $\square$

Упражнение 16.16. Покажите, что для общего типа расщепления полустабильного нормализованного расслоения на $\mathbb{P}^n$ данного ранга есть лишь конечное число возможностей.

Отчасти верно и обратное утверждение к теореме Грауэрта–Мюлиха.

Лемма 16.17. *Если E — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, такое что для общей прямой $L \subset \mathbb{P}^n$ имеем $E_{|L} \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$, то E полустабильно.*

Доказательство: индукция по n. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть теперь $n \geq 2$. Пусть L — общая прямая. Выберем $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, так что $L \subset \mathbb{P}^{n-1}$. Тогда $E_{|\mathbb{P}^{n-1}}$ полустабильно, значит $H^0(\mathbb{P}^{n-1}, E_{|\mathbb{P}^{n-1}}(-k)) = 0$ при $k \geq 1$. Из точной последовательности $0 \to E(-1) \to E \to i_*(E_{|\mathbb{P}^{n-1}}) \to 0$, где $i : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$ — вложение, следует, что морфизм $H^0(\mathbb{P}^n, E(-k-1)) \to H^0(\mathbb{P}^n, E(-k))$ — изоморфизм при $k \geq 1$. Но $H^0(\mathbb{P}^n, E(-k)) = 0$ при $k \gg 0$, значит $H^0(\mathbb{P}^n, E(-1)) = 0$, следовательно E полустабильно. $\square$

Теорема 16.18 (Барт–Маруяма). *Пусть $n \geq 3$ и E — полустабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$. Для общей гиперплоскости $\mathbb{P}^{n-1}$ расслоение $E_{|\mathbb{P}^{n-1}}$ полустабильно.*

Доказательство: Можно считать, что E нормализовано. Если $\mathrm{c}_1(E) = 0$, то все следует из предыдущей леммы и теоремы Грауэрта–Мюлиха. Пусть $\mathrm{c}_1(E) = -1$. Пусть L — общая прямая, так что $E_{|L} = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1)$. Пользуясь рассуждениями предыдущей леммы легко показать, что для любой гиперплоскости $H \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, проходящейчерез L отображение $H^0(H, E_{|H}) \to H^0(L, E_{|L})$ — вложение. Поэтому, если для всех таких H расслоение $E_{|H}$ не полустабильно, то отображение $H^0(H, E_{|H}) \to H^0(L, E_{|L})$ — изоморфизм. Рассмотрим пространство $L^\perp \cong \mathbb{P}^{n-2}$ всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, проходящих через L. Пусть $Q = \{(x, H) \in \mathbb{P}^n \times L^\perp \mid x \in H\} \subset \mathbb{P}^n \times L^\perp$. Обозначим через $p : Q \to \mathbb{P}(V)$ и $q : Q \to L^\perp$ проекции. Ясно, что $L \times L^\perp \subset Q$. Обозначим через $i : L \times L^\perp \to Q$ — вложение.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n & Q \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "q"] & L \times L^\perp \arrow[l, "i"'] \\ & L^\perp & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим на Q морфизм $p^*E \to i_*i^*p^*E$ и применим к нему q_*. Согласно доказанному выше $q_*p^*E \cong q_*i_*i^*p^*E$. Но ясно, что $p \circ i$ — композиция проекции $L \times L^\perp \to L$ и вложения $L \to \mathbb{P}^n$, а $q \circ i$ — проекция $L \times L^\perp \to L^\perp$, поэтому $q_*i_*i^*p^*E \cong H^0(L, E_{|L}) \otimes \mathcal{O}_{L^\perp} \cong \mathcal{O}_{L^\perp}$. Значит $q_*p^*E \cong \mathcal{O}_{L^\perp}$. Кроме того, ясно, что естественный морфизм $\mathcal{O}_Q = q^*q_*p^*E \to E$ является вложением (на слоях Q над $L^\perp$ это морфизм $\mathcal{O}_H \to E_{|H}$). Применяя p_* получаем вложение $p_*\mathcal{O}_Q \to p_*p^*E \cong E \otimes p_*\mathcal{O}_Q$. Но $p_*\mathcal{O}_Q \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (проверьте это!), т.е. получаем вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to E$, что противоречит полустабильности E. $\square$

Следствие 16.19. *Если E — полустабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, то $\Delta_E = \mathrm{c}_1(E)^2 - 4\,\mathrm{c}_2(E) \leq 0$.*

17. Спектральная последовательность Бейлинсона.

Спектральная последовательность Бейлинсона позволяет выразить произвольное расслоение (когерентный пучок) на проективном пространстве через конечный набор простейших расслоений. Но прежде чем перейти к этой спектральной последовательности, скажем несколько слов о спектральных последовательностях вообще.

Пусть $K^\bullet$ — комплекс (абелевых групп) с заданной на нем регулярной убывающей фильтрацией $F_\bullet K^\bullet$: $\dots \subset F_{i+1}K^\bullet \subset F_iK^\bullet \subset F_{i-1}K^\bullet \subset \dots$. Регулярность означает, что $\cap_p F_pK^\bullet = 0$ и $\cup_p F_pK^\bullet = K^\bullet$. Обозначим через $G_F^\bullet K^\bullet$ — присоединенный градуированный комплекс, $G_F^iK^\bullet = F_iK^\bullet/F_{i+1}K^\bullet$. Следующие примеры полезно иметь в виду:

Пример 17.1. Пусть $C^{\bullet,\bullet}$ — бикомплекс, то есть биградуированная абелева группа с заданными коммутирующими дифференциалами $d' : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$ и $d'' : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$, (то есть $d' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ и $d' \circ d'' = d'' \circ d'$). Положим $K^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet})$, то есть $K^n = \oplus_{p+q=n} C^{p,q}$, и $d_{|C^{p,q}} = d' + (-1)^p d''$. Рассмотрим на $K^\bullet$ фильтрацию $F'_iK^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\ge i,\bullet})$, то есть $F'_iK^n = \oplus_{p+q=n,\ p\ge i} C^{p,q}$. Аналогично определеятеся фильтрация $F''_iK^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\bullet,\ge i})$, то есть $F''_iK^n = \oplus_{p+q=n,\ q\ge i} C^{p,q}$.

Упражнение 17.2. Проверьте, что $K^\bullet$ — комплекс, $F'_\bullet$ и $F''_\bullet$ — регулярные убывающие фильтрации, и $G^i_{F'}K^\bullet = (C^{i,\bullet}[-i], (-1)^i d'')$, $G^i_{F''}K^\bullet = (C^{\bullet,i}[-i], d')$.

Полезны также следующие два примера:

Пример 17.3. Пусть $K^\bullet$ — комплекс. Положим

$$\sigma_{\ge p}K^n = \begin{cases} 0, & n < p \\ K^n, & n \ge p \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \tau_{\le -p}K^n = \begin{cases} K^n, & n < -p \\ \operatorname{Ker} d^n, & n = -p \\ 0, & n \ge -p \end{cases}$$

Фильтрация $\dots\sigma_{\ge p+1}K^\bullet \subset \sigma_{\ge p}K^\bullet \subset \sigma_{\ge p-1}K^\bullet \subset \dots$ называется глупой, а фильтрация $\dots\tau_{\le -(p+1)}K^\bullet \subset \tau_{\le -p}K^\bullet \subset \tau_{\le -(p-1)}K^\bullet \subset \dots$ — канонической.

Возникает вопрос, можно ли в терминах когомологий комплексов $G_F^iK^\bullet$ описать когомологии исходного комплекса. Рассмотрим вначале пример.

Пусть $F_\bullet$ — фильтрация длины 2, то есть $F_0K^\bullet = K^\bullet$ и $F_2K^\bullet = 0$. Иначе говоря, имеем точную последовательность

$$0 \to G_F^1K^\bullet \to K^\bullet \to G_F^0K^\bullet \to 0,$$

которая по лемме о змее дает длинную точную последовательность когомологий $\dots \to H^i(K^\bullet) \to H^i(G_F^0K^\bullet) \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(G_F^1K^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet) \to \dots$ Иначе говоря, получаем точные тройки $0 \to \operatorname{Coker}\partial^{i-1} \to H^i(K^\bullet) \to \operatorname{Ker}\partial^i \to 0$. Таким образом, на когомологиях $H^i(K^\bullet)$ возникает фильтрация длины 2, присоединенные факторы которой вычисляются дифференциалом ∂, действующим в когомологиях присоединенных комплексов. Аналогичная ситуация возникает и в общем случае — на когомологиях присоединенных комплексов возникает последовательность дифференциалов, вычисляя когомологии которых, мы в конечном итоге получаем присоединенные факторы некоторой фильтрации, возникающей на когомологиях исходного комплекса. Эта последовательность дифференциалов и называется спектральной последовательностью.

Опишем ее явно. Пусть

$$Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1}) = \{x \in F_pK^{p+q} \mid dx \in F_{p+r}K^{p+q+1}\}.$$

Если $r = 0$, то ясно, что $Z_0^{p,q} = F_pK^{p+q}$. Кроме того, ясно, что $Z_0^{p,q} \supset Z_1^{p,q} \supset Z_2^{p,q} \supset \ldots$ — убывающая фильтрация. Если фильтрация члена K^{p+q+1} конечна, т.е. $F_{p+r}K^{p+q+1} = 0$ при $r \gg 0$, то фильтрация $Z_r^{p,q}$ стабилизируется, т.е. при $r \gg 0$ имеем $Z_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q}$ (если $F_{p+r}K^{p+q+1} = 0$, то $Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d$).

Лемма 17.4. *Имеем* $Z_r^{p,q} \subset Z_{r+1}^{p-1,q+1}$.

Доказательство: По определению, $Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1})$, а $Z_{r+1}^{p-1,q+1} = F_{p-1}K^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1})$. □

Определим теперь

$$E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}).$$

Лемма 17.5. *Имеем* $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_F^pK^\bullet)$.

Доказательство: По определению

$$E_1^{p,q} = \{x \in F_pK^{p+q} \mid dx \in F_{p+1}K^{p+q+1}\}/(F_{p+1}K^{p+q} + dF_pK^{p+q-1}).$$

Всякому $x \in E_1^{p,q}$ сопоставим его образ $\bar{x} \in F_pK^{p+q}/F_{p+1}K^{p+q} = G_F^pK^{p+q}$. Ясно, что $d(\bar{x}) = 0$, так как $dx \in F_{p+1}K^{p+q+1}$. То есть $\bar{x} \in \operatorname{Ker} d$. При этом факторизация по dF_pK^{p+q-1} в определении $E_1^{p,q}$ превращается в факторизацию по $\operatorname{Im} d$ в $G_F^pK^{p+q}$. □

Лемма 17.6. *d индуцирует дифференциал* $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$.

Доказательство: Пусть $x \in Z_r^{p,q}$. Тогда $dx \in F_{p+r}K^{p+q}$ по определению, причем $ddx = 0$, то есть $ddx \in F_{p+2r}K^{p+q+1}$, так что $dx \in Z_r^{p+r,q-r+1}$. При этом, если $x \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, то $dx \in dZ_{r-1}^{p+1,q-1} = dZ_{r-1}^{(p+r)-r+1,(q-r+1)+r-2}$, а если $x \in dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$, то $dx = 0$. Так что действительно индуцируется оператор $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$. Его квадрат очевидно равен нулю. □

Упражнение 17.7. Покажите, что $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ совпадает со связывающим гомоморфизмом $\partial : H^{p+q}(G_F^pK^\bullet) \to H^{p+q+1}(G_F^{p+1}K^\bullet)$ из точной последовательности когомологий, возникающей из точной тройки комплексов $0 \to G_F^{p+1}K^\bullet \to F_pK^\bullet/F_{p+2}K^\bullet \to G_F^pK^\bullet \to 0$.

Лемма 17.8. $\operatorname{Ker} d_r^{p,q}/\operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1} \cong E_{r+1}^{p,q}$.

Доказательство: Пусть $\bar{x} \in E_r^{p,q}$, а $x \in Z_r^{p,q}$ — его представитель. Если $d_r^{p,q}\bar{x} = 0$ в $E_r^{p+r,q-r+1}$, то $dx \in Z_r^{p+r,q-r+1}$ лежит в $Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1}$. Ясно, что меняя представитель x на элемент из $Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ можно считать, что $dx \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset F_{p+r+1}K^{p+q+1}$. Значит $x \in Z_{r+1}^{p,q}$. Рассмотрим его класс $\alpha(\bar{x}) \in E_{r+1}^{p,q}$. Получаем отображение $\alpha : \operatorname{Ker} d_r^{p,q} \to E_{r+1}^{p,q}$.

<u>Корректность</u>. Если $x' \in Z_r^{p,q}$ — другой представитель $\bar{x}$, такой что $dx' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. Тогда $x - x'$ можно записать в виде $y_1 + y_2$, где $y_1 \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, $y_2 \in dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Тогда $dy_1 = d(y_1+y_2) = d(x-x') = dx - dx' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset F_{p+r+1}K^{p+q+1}$. При этом $y_1 \in F_{p+1}K^{p+q}$, поэтому $y_1 \in Z_r^{p+1,q-1}$. С другой стороны, $y_2 \in dZ_r^{p-r,q+r-1}$ по лемме 17.4. Значит $\alpha(x - x') = 0$.

Ядро. Пусть $\alpha(\bar{x}) = 0$. Значит $x \in Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}$. Заметим, что $Z_r^{p+1,q-1} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, так что можно считать, что $x \in dZ_r^{p-r,q+r-1}$. Но тогда $x \in \operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$. И наоборот, если $\bar{x} = d_r^{p-r,q+r-1}(\bar{y})$, то $x = dy$, $y \in Z_r^{p-r,q+r-1}$, поэтому $\alpha(\bar{x}) = 0$.

Образ. Возьмем произвольный элемент в $E_{r+1}^{p,q}$ и поднимем его в $Z_{r+1}^{p,q}$. Так как $Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$, получим тем самым элемент из $x \in Z_r^{p,q}$, а дополнительное условие $dx \in F_{p+r+1}K^{p+q+1}$ даст $d_r^{p,q}(\bar{x}) = 0$. Значит α сюръективно. □

Напомним, что из конечности и регулярности фильтрации $F_\bullet K^\bullet$ на каждом члене комплекса K следует стабилизация групп $Z_r^{p,q}$ для всех p, q, а значит и групп $E_r^{p,q}$. Обозначим через $Z_\infty^{p,q}$ и $E_\infty^{p,q}$ стабильные значения.

Рассмотрим теперь $E^n := H^n(K^\bullet)$. Обозначим через $F_iE^n \subset E^n$ образ $H^n(F_iK^\bullet)$ в $H^n(K^\bullet)$.

Теорема 17.9. *Предположим, что фильтрация $F_\bullet K^\bullet$ конечна и регулярна на каждом члене комплекса K. Тогда $E_\infty^{p,q} \cong F_pE^{p+q}/F_{p+1}E^{p+q}$.*

Доказательство: При $r \gg 0$ имеем

$$Z_r^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+r}K^{p+q+1}) = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(0),$$
$$dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} = d(F_{p-r+1}K^{p+q-1} \cap d^{-1}(F_pK^{p+q})) = d(K^{p+q-1}) \cap F_pK^{p+q}.$$

Поэтому $E_\infty^{p,q} = (F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d)/(F_{p+1}K^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d + F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Im} d)$.

Пусть $\bar{x} \in F_pE^{p+q}$. Пусть $x \in H^{p+q}(F_pK^\bullet)$ — его представитель. Значит $x \in F_pK^{p+q}$, $dx = 0$. Значит $x \in Z_\infty^{p,q}$. Обозначим через $\beta(\bar{x})$ его образ в $E_\infty^{p,q}$.

Корректность. Если x' — другой представитель, то $x - x' \in F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Im} d$, поэтому $\beta(x') = \beta(x)$.

Ядро. Пусть $\beta(\bar{x}) = 0$. Значит $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in F_{p+1}K^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d$, $x_2 \in F_pK^{p+q} \cap \operatorname{Im} d$. Но тогда $\bar{x} = \bar{x}_1 \in F_{p+1}E^{p+q}$. Поэтому $\operatorname{Ker} \beta = F_{p+1}E^{p+q}$.

Образ. Сюръективность очевидна. □

Утверждение теоремы описывается словами так: спектральная последовательность с первым членом $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_F^pK^\bullet)$ сходится к $E^n = H^n(K^\bullet)$, записывается $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_F^pK^\bullet) \Longrightarrow E^n = H^n(K^\bullet)$.

Рассмотрим спектральную последовательность связанную с фильтрацией тотального комплекса бикомплекса.

Теорема 17.10. *Если $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\{p \in \mathbb{Z} \mid C^{p,n-p} \neq 0\}$ конечно (диагонали бикомплекса ограничены), то существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{p,q} = H_{d'}^p(H_{d''}^q(C^{\bullet,\bullet}))$, сходящаяся к $E^n = H^n(\mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet}))$.*

Доказательство: Рассмотрим фильтрацию F' на $K^\bullet = \mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet})$. Тогда $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_{F'}^pK^\bullet) = H^{p+q}(C^{p,\bullet}[-p], (-1)^pd'') = H_{d''}^q(C^{p,\bullet})$. Остается заметить, что дифференциал $d_1^{p,q}$ индуцирован дифференциалом $d = d' + (-1)^pd''$ совпадает на $E_1^{p,q}$ с d'. □

Транспонируя бикомплекс, получаем вторую спектральную последовательность $E_2^{p,q} = H_{d''}^q(H_{d'}^p(C^{\bullet,\bullet}))$, которая тоже сходится к $E^n = H^n(\mathsf{Tot}(C^{\bullet,\bullet}))$.

Применим науку о спектральных последовательностях в следующей ситуации. Пусть F — произвольный пучок на многообразии X, $\dots \to F^{-2} \to F^{-1} \to F^0 \to F \to 0$ — его резольвента, а $f : X \to Y$ — морфизм. Выберем аффинное покрытие X над Y и рассмотрим бикомплекс $C^{p,q} = f_*(\underline{\mathcal{C}}_{F^p}^q)$, в котором d'' — дифференциал Чеха, а d' — индуцирован дифференциалом в комплексе $F^\bullet$. Рассмотрим спектральные последовательности этого бикомплекса.

Лемма 17.11. $H^q_{d''}(H^p_{d'}(C^{\bullet,\bullet})) = \begin{cases} R^q f_*(F), & p=0 \\ 0, p \neq 0 \end{cases}$

Доказательство: Действительно, $H^p_{d'}(C^{\bullet,q}) = f_*(\underline{\mathcal{C}}^q_{\mathcal{H}^p(F^\bullet)})$ так как $\underline{\mathcal{C}}^q_{(-)}$ — точный функтор. Но $\mathcal{H}^p(F^\bullet) = F$ при $p = 0$ и нулю иначе. □

Из леммы сразу следует, что $E^n = R^n f_*(F)$.

Следствие 17.12. *Существует спектральная последовательность с первым членом $E_1^{p,q} = R^q f_* F^p$, которая сходится к $E^n = R^n f_*(F)$.*

Доказательство: Действительно, $H^q_{d''}(C^{p,\bullet}) = R^q f_*(F^p)$. □

Упражнение 17.13. **(1)** Пусть $F^\bullet$ — произвольный комплекс пучков на X. Постройте две спектральные последовательности: ${}'E_2^{p,q} = R^q f_*(\mathcal{H}^p(F^\bullet))$ и ${}''E_1^{p,q} = R^q f_*(F^p)$, которые сходятся к одному и тому же (к n-му гиперпрямому образу комплекса). **(2)** Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ и F — пучок на X. Докажите, что существует спектральная последовательность $E_2^{p,q} = R^q g_*(R^p f_*(F))$, которая сходится к $R^n(g \circ f)_*(F)$.

Воспользуемся теперь построенной спектральной последовательностью в очень специальной ситуации. Рассмотрим $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Пусть $\pi_1, \pi_2 : X \to \mathbb{P}^n$ — проекции. Будем для краткости обозначать $\pi_1^* F \otimes \pi_2^* G$ через $F \boxtimes G$. Рассмотрим пучок $\mathcal{O}(1) \boxtimes T(-1)$ и его сечение s, соответствующее морфизму $\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O} \to V \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}) \to \mathcal{O} \boxtimes T(-1)$.

Лемма 17.14. *Множество нулей сечениея s — диагональ $\Delta(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.*

Доказательство: Возьмем точку $(v, w) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Над ней сечение задается композицией $\mathbb{C}v \to V \to V/\mathbb{C}w$, поэтому оно равно нулю при $v = w$. □

Упражнение 17.15. Покажите, что $\Delta(\mathbb{P}^n) = \{s = 0\}$ как схема, то есть $J_{\Delta(\mathbb{P}^n)} = \mathrm{Im}(\mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \xrightarrow{s} \mathcal{O})$.

Поскольку $r(\mathcal{O}(1) \boxtimes T(-1)) = n = \operatorname{codim} \Delta(\mathbb{P}^n)$, значит сечение s регулярное, и получаем резольвенту Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \to \cdots \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \to \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O} \to \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0.$$

Она называется резольвентой диагонали. Возьмем теперь произвольный пучок F на $\mathbb{P}^n$ и домножим резольвенту диагонали на $\pi_1^* F$.

Лемма 17.16. *Имеем изоморфизмы $\pi_1^* F \otimes (\mathcal{O}(-p) \boxtimes \Omega^p(p)) \cong F(-p) \boxtimes \Omega^p(p)$, $\pi_1^* F \otimes \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \Delta_* F$, причем высшие* Tor*-ы равны нулю.*

Доказательство: Первое очевидно. Второе следует из формулы проекции $\pi_1^* F \otimes \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \Delta_*(\Delta^* \pi_1^* F)$, так как $\pi_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$. □

Таким образом, получаем резольвенту пучка $\Delta_* F$:

$$0 \to F(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \to \cdots \to F(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \to F \boxtimes \mathcal{O} \to \Delta_* F \to 0.$$

Рассмотрим теперь спектральную последовательность для π_{2*}.

Лемма 17.17. *Имеем $R^q \pi_{2*}(F(-p) \boxtimes \Omega^p(p)) \cong H^q(\mathbb{P}^n, F(-p)) \otimes \Omega^p(p)$, а также $R^q \pi_{2*} \Delta_* F \cong F$ при $q = 0$ и нулю иначе.*

Доказательство: Первое следует из плоской замены базы. Второе очевидно, так как $\pi_2 \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$. $\square$

Применяя к полученной резольвенте пучка $\Delta_* F$ спектральную последовательность следствия 17.12, получаем.

Теорема 17.18 (Бейлинсон). *Существует спектральная последовательность* $E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F(p)) \otimes \Omega^{-p}(-p) \Longrightarrow E^0 = F$, $E^{\neq 0} = 0$ $(-n \le p \le 0)$.

Аналогично, домножая резолвенту диагонали на π_2^* и рассматривая спектральную последовательность для π_{1*} получаем

Теорема 17.19 (Бейлинсон). *Существует спектральная последовательность* $E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}(p) \Longrightarrow E^0 = F$, $E^{\neq 0} = 0$ $(-n \le p \le 0)$.

Применим вторую спектральную последовательность Бейлинсона в случае пучка на $\mathbb{P}^1$. Заметим, что на $\mathbb{P}^1$ имеем $\Omega^1(1) \cong \mathcal{O}(-1)$, поэтому спектральная последовательность имеет имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{c} H^1(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d_1} H^1(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \\[1ex] H^0(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d_1} H^0(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \end{array} \right\}$$

и в конечном итоге получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^0(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \to F \to \\ \to H^1(\mathbb{P}^1, F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^1(\mathbb{P}^1, F) \otimes \mathcal{O} \to 0. \end{aligned}$$

Применим теперь эту же спектральную последовательность к пучку идеалов скрученной кубической кривой $C \subset \mathbb{P}^3$.

Лемма 17.20. *Имеем* $H^q(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^p(p)) = 0$ *при* $p = 0, 1$ *и всех* q, *а также при* $p = 2$ *и* $q = 3$ *и при* $p = 0$ *и* $q \neq 2$.

Доказательство: Во-первых, заметим, что $H^q(\mathbb{P}^3, J_C(p)) = 0$ при $p = 0, 1$. Это легко следует из точной последовательности $0 \to J_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to i_* \mathcal{O}_C \to 0$. и изоморфизмов $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C)$, $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1)) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(3))$. Из точной последовательности $0 \to \Omega^1(1) \to V^* \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0$ следуют первые два зануления, а из последовательности $0 \to \Omega^2(2) \to \Lambda^2 V^* \otimes \mathcal{O} \to \Omega^1(2) \to 0$ третье. Наконец, $\Omega^3(3) \cong \mathcal{O}(-1)$, поэтому $H^q(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^3(3)) = H^q(\mathbb{P}^3, J_C(-1)) \cong H^{q-1}(C, \mathcal{O}_C(-3)) = \mathbb{C}^2$ при $q = 2$ и нулю иначе. $\square$

Итак, спектральная последовательность принимает вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & H^3(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & 0 & 0 \\ \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_1} & H^2(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & 0 & 0 \\ 0 & H^1(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

откуда следует, что $H^3(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) = H^1(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) = 0$ и получается точная посл-ть $0 \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \to H^2(\mathbb{P}^3, J_C \otimes \Omega^2(2)) \otimes \mathcal{O}(-2) \to J_C \to 0$. Глядя на ранги, видим, что второй член равен $\mathcal{O}(-2)^{\oplus 3}$, откуда получаем резольвенту

$$0 \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{O} \to i_* \mathcal{O}_C \to 0.$$

17. Применения спектральных последовательностей Бейлинсона.

В прошлый раз мы построили для всякого когерентного пучка F на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ две спектральные последовательности

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F(p)) \otimes \Omega^{-p}(-p) \quad\Longrightarrow\quad E^0 = F,\ E^{\neq 0} = 0\ (-n \le p \le 0),$$

и

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}(p) \quad\Longrightarrow\quad E^0 = F,\ E^{\neq 0} = 0\ (-n \le p \le 0).$$

Сегодня мы займемся применением этих спектральных последовательностей.

Теорема 17.1. *Всякий когерентный пучок на проективном пространстве имеет конечную резольвенту из прямых сумм линейных расслоений.*

Доказательство: Пусть $F \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$. Для каждого $-n \le p \le 0$ выберем целое число N_p, такое что $H^{>0}(\mathbb{P}^n, F(t) \otimes \Omega^{-p}(-p)) = 0$ при $t \ge N_p$. Положим $N = \max\{N_p\}$. Рассмотрим вторую спектральную последовательность для пучка $F(N)$. Тогда $E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n, F(N) \otimes \Omega^{-p}(-p)) \otimes \mathcal{O}(p)$ при $q > 0$ равно нулю, то есть спектральная последовательность имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{matrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \\ H^0(F(N) \otimes \Omega^n(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & H^0(F(N)) \otimes \mathcal{O} \end{matrix} \right\}$$

Значит $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$ и спектральная последовательность вырождается в точную последовательность

$$0 \to H^0(F(N) \otimes \Omega^n(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \to \cdots \to H^0(F(N)) \otimes \mathcal{O} \to F(N) \to 0.$$

Откручивая на $-N$ получаем искомую резольвенту пучка F. $\square$

Заметим, что приведенной выше теоремой мы пользовались при доказательстве теоремы Римана–Роха и двойственности Серра.

Перейдем теперь к более конкретным ситуациям. Нам понадобится следующая переформулировка теоремы Римана–Роха.

Упражнение 17.2. Пусть F — расслоение на $\mathbb{P}^n$, $r = r(F)$, $c_i = \mathrm{c}_i(F)$. Докажите, что **(1)** если $n = 2$, то $\chi(F(t)) = \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{2t+3}{2}c_1 - c_2 + \frac{(t+1)(t+2)}{2}r$; **(2)** если $n = 3$, то $\chi(F) = \frac{1}{6}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{t+2}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{3t^2+12t+11}{6}c_1 + \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{6}r$.

Теорема 17.3. *Пусть F — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1(F) = -1$, $\mathrm{c}_2(E) = 1$. Тогда $F \cong \Omega^1(1)$.*

Доказательство: $H^0(F) = H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = 0$ в силу стабильности F. Аналогично, $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-1)) = \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-2)) = \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-3)) = 0$. Однако, по двойственности Серра $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}(-p)) \cong H^2(F(p-3))^*$, поэтому $H^2(F) = H^2(F(-1)) = H^2(F(-2)) = 0$. Наконец, по теореме Римана–Роха $\chi(F) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 + 2 = 0$, $\chi(F(-1)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$, $\chi(F(-2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$, поэтому $H^1(F) = H^1(F(-2)) = 0$, $H^1(F(-1)) = \mathbb{C}$. Значит первая спектральная последовательность Бейлинсона имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^1(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

и теорема доказана. □

Теорема 17.4. *Пусть F — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1(F) = 0$, $\mathrm{c}_2(E) = 2$. Тогда $F \cong \mathrm{Coker}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \hookrightarrow \Omega^1(1)^{\oplus 2})$.*

Доказательство: Аналогично доказательству предыдущей теоремы имеем $H^0(F) = H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = H^2(F) = H^2(F(-1)) = H^2(F(-2)) = 0$. Далее, по теореме Римана–Роха $\chi(F) = -2+2 = 0$, $\chi(F(-1)) = \chi(F(-2)) = -2$, поэтому $H^1(F) = 0$, $H^1(F(-1)) = H^1(F(-2)) = \mathbb{C}^2$. Значит первая спектральная последовательность Бейлинсона имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \Omega^2(2)^{\oplus 2} & \xrightarrow{d_1} \Omega^1(1)^{\oplus 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

и теорема доказана, так как $\Omega^2(2) \cong \mathcal{O}(-1)$. □

Теорема 17.5. *Пусть F — полустабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$, такое что $\mathrm{c}_1(F) = 0$, $\mathrm{c}_2(F) = m$. Тогда F изоморфно когомологии в среднем члене комплекса $0 \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus m} \to \mathcal{O}^{\oplus(2m+2)} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus m} \to 0$.*

Доказательство: Аналогично доказательству предыдущей теоремы имеем $H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = H^0(F(-3)) = H^2(F) = H^2(F(-1)) = H^2(F(-2)) = 0$. Вычислим теперь $H^p(F \otimes \Omega^1)$. Для этого воспользуемся точной последовательностью $0 \to \Omega^1 \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \to \mathcal{O} \to 0$. Тензорно домножая ее на F получаем $H^0(F \otimes \Omega^1) = 0$. Далее, пользуясь изоморфизмом $\Omega^1 \cong \Omega^2 \otimes T \cong T(-3)$ из точной полседовательности Эйлера получаем $0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to \Omega^1 \to 0$, откуда следует $H^2(F \otimes \Omega^1) = 0$. Рассмотрим теперь вторую спектральную последовательность Бейлинсона для пучка $F(-1)$. Так как очевидно $F(-1) \otimes \Omega^1(1) = F \otimes \Omega^1$, $F(-1) \otimes \Omega^2(2) \cong F(-2)$, она имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ H^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{d_1} H^1(F \otimes \Omega^1) \otimes \mathcal{O}(-1) & \xrightarrow{d_1} H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Отсюда заключаем, что $F(-1)$ является когомологией в среднем члене комплекса

$$0 \to H^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}(-2) \to H^1(F \otimes \Omega^1) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O} \to 0 \quad (*)$$

Наконец, $\chi(F(-1)) = \chi(F(-2)) = -m$, значит $H^1(F(-1)) = H^1(F(-2)) = \mathbb{C}^m$, а так как ранг F равен 2, то $H^1(F \otimes \Omega^1) = \mathbb{C}^{2m+2}$. Подкручивая на $\mathcal{O}(1)$, получаем искомый комплекс. □

В дальнейшем, теорема 17.5 будет использована для описания многообразия модулей полустабильных расслоений на $\mathbb{P}^2$.

Представление расслоений как средней когомологии трехчленных комплексов достаточно распространено, поэтому такие комплексы имеют специальное название.

Определение. Комплекс вида $0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$, где A, B, C — расслоения, a — вложение расслоений, а b — сюръекция называется монадой. Расслоение $E = \operatorname{Ker} b / \operatorname{Im} a$ называется когомологией монады.

Упражнение 17.6. Проверьте равенства $r(E) = r(B) - r(A) - r(C)$, $\mathrm{c}(E) = \mathrm{c}(B)\,\mathrm{c}(A)^{-1}\,\mathrm{c}(C)^{-1}$. В частности, $\mathrm{c}_1(E) = \mathrm{c}_1(B) - \mathrm{c}_1(A) - \mathrm{c}_1(C)$.

Упражнение 17.7. Пусть F — расслоение на $\mathbb{P}^2$ любого ранга, такое что $H^0(F(-1)) = H^0(F^*(-1)) = 0$. Покажите, что F является когомологией монады $(*)$.

Теорема 17.8. *Пусть $F \cong F^*$ — самодвойственное расслоение на $\mathbb{P}^3$, такое что $H^0(F) = H^1(F(-2)) = 0$. Тогда F является когомологией монады*

$$0 \to H^2(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to H^2(F \otimes \Omega^2) \otimes \mathcal{O} \to H^2(F \otimes \Omega^1(-1)) \otimes \mathcal{O}(1) \to 0.$$

Доказательство: Из $H^0(F) = 0$ легко следует $H^0(F(-1)) = H^0(F(-2)) = H^0(F(-3)) = 0$, откуда по двойственности Серра $H^0(F(-t)) \cong H^3(F^*(t-4))^*$ получаем $H^3(F(-2)) = H^3(F(-3)) = 0$. Далее, пользуясь точной последовательностью

$$0 \to \Omega^1 \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \to \mathcal{O} \to 0,$$

ее внешним квадратом

$$0 \to \Omega^2 \to \mathcal{O}(-2)^{\oplus 6} \to \Omega^1 \to 0,$$

и последовательностью

$$0 \to \mathcal{O}(-4) \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 4} \to \Omega^2 \to 0$$

(получающейся из точной последовательности Эйлера откруткой на -4 ввиду изоморфизма $\Omega^2 \cong \Omega^3 \otimes T \cong T(-4)$), выводим $H^0(F \otimes \Omega^1(-1)) = H^0(F \otimes \Omega^2) = 0$, а также $H^3(F \otimes \Omega^1(-1)) = H^3(F \otimes \Omega^2) = 0$. Далее, пользуясь равенством $H^1(F(-2)) = 0$, получаем $H^1(F \otimes \Omega^1(-1)) = H^1(F \otimes \Omega^2) = 0$. Наконец, по двойственности Серра $H^2(F(-2)) = H^1(F^*(-2)) = H^1(F(-2)) = 0$. Рассмотрим теперь вторую спектральную последовательность Бейлинсона для пучка $F(-2)$. Так как очевидно $F(-2) \otimes \Omega^1(1) = F \otimes \Omega^1(-1)$, $F(-2) \otimes \Omega^2(2) \cong F \otimes \Omega^2$, $F(-2) \otimes \Omega^3(3) \cong F(-3)$, она имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^2(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{d_1} & H^2(F \otimes \Omega^2) \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{d_1} & H^1(F \otimes \Omega^1(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) & 0 \\ H^1(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Отсюда заключаем, что $H^1(F(-3)) = 0$, и $F(-2)$ является когомологией монады

$$0 \to H^2(F(-3)) \otimes \mathcal{O}(-3) \to H^2(F \otimes \Omega^2) \otimes \mathcal{O}(-2) \to H^1(F \otimes \Omega^1(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to 0$$

Остается подкрутить ее на $\mathcal{O}(2)$. $\square$

Упражнение 17.9. Докажите, что если F — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ и $\mathrm{c}_1(F) = 0$, то $F \cong F^*$ и $H^0(F) = 0$.

17.1. **Расслоение Хоррокса–Мамфорда.** Расслоение Хоррокса–Мамфорда — это стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^4$. Оно является по существу единственным известным примером стабильного расслоения на $\mathbb{P}^n$ ранга $r < n$ при $n \geq 4$. Исторически оно было построено с помощью конструкции Серра, примененной к двумерному комплексному тору, лежащему в $\mathbb{P}^4$ в виде поверхности степени 10. Существование такой поверхности обнаружил Мамфорд.

Лемма 17.10 (Мамфорд). *В $\mathbb{P}^4$ существует гладкое двумерное подмногообразие $Y \cong \mathbb{P}^4$ изоморфное комплексному тору $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. При этом $\deg Y = 10$, $H^{>0}(Y, \mathcal{O}_Y(t)) = 0$ и $\dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(t)) = 5t^2$ при $t > 0$, где $\mathcal{O}_Y(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(t)_{|Y}$, и $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = \binom{2}{q}$. Кроме того, Y не лежит ни в какой в квадрике.*

Доказательство: Существование гладкого тора степени 10 в $\mathbb{P}^4$ — факт глубоко нетривиальный и его доказательство выходит за рамки нашего курса, а утверждения о размерностях групп когомологий вытекают из теоремы Кодаиры о занулении (ее мы не проходили) и теоремы Римана–Роха. $\square$

Лемма 17.11. $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^4} \cong \mathcal{O}_Y(5)$.

Доказательство: Рассмотрим точную последовательность присоединения $0 \to T_Y \to T_{\mathbb{P}^4|Y} \to \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^4} \to 0$. Расслоение T_Y тривиально, так как $Y = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$, поэтому $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^4} \cong \det T_{\mathbb{P}^4|Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)_{|Y} \cong \mathcal{O}_Y(5)$. $\square$

Пусть E — расслоение, полученное применением конструкции Серра к Y, так что имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(5) \to 0. \tag{$\dagger$}$$

Таким образом $\mathrm{c}_1(E) = 5$.

Лемма 17.12. *Имеем $H^0(J_Y(2)) = 0$. В частности расслоение E стабильно.*

Доказательство: Если $H^0(J_Y(2)) \neq 0$, то тор Y лежал бы в квадрике, что не верно. Поэтому $H^0(J_Y(2)) = 0$. Отсюда следует, что $H^0(E(-3)) = 0$, и так как $E(-3)$ нормализованое ранга 2, то $E(-3)$ (а значит и E) стабильно. $\square$

Рассмотрим первую спектральную последовательность Бейлинсона, примененную к нормализованному расслоению $E(-3)$.

Лемма 17.13. *Имеем $H^1(E(-3)) = H^3(E(-7)) = \mathbb{C}^5$, $H^2(E(-5)) = \mathbb{C}^2$, а остальные когомологии расслоений $E(-3-p)$ при $0 \leq p \leq 4$ равны нулю.*

Доказательство: Подкручивая точную последовательность ($\dagger$) на -3 получаем $H^\bullet(E(-3)) = H^\bullet(J_Y(2))$. Далее, из точной последовательности

$$0 \to J_Y \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

подкрученной на 2 и леммы 17.10 следует $\dim H^1(J_Y(2)) = 5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 6/2 = 20 - 15 = 5$ и зануление остальных когомологий пучка $J_Y(2)$. Аналогично, $H^\bullet(E(-4)) = H^\bullet(J_Y(1))$, и $\dim H^1(J_Y(1)) = 5 \cdot 1^2 - 5 = 0$ и зануление остальных когомологий пучка $J_Y(1)$. Наконец, из леммы 17.10 следует, что $H^0(J_Y) = H^1(J_Y) = 0$, $H^2(J_Y) = \mathbb{C}^2$, откуда, пользуясь последовательностью ($\dagger$), получаем $H^0(E(-5)) = H^1(E(-5)) = 0$, $H^2(E(-5)) = \mathbb{C}^2$. Для вычисления остальных когомологий воспользуемся двойственностью Серра. Так как $\det E \cong \mathcal{O}(5)$, то $E^* \cong E(-5)$, поэтому $H^q(E(-5-t)) = H^q(E^*(-t)) \cong H^{4-q}(E(t-5))^*$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Итак, первый член спектральной последовательности имеет вид

$$E_1^{\bullet,\bullet}=\left\{\begin{tikzcd}[row sep=small] 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \arrow[rrd, "d_2"] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2(2)^{\oplus 2} \arrow[rrd, "d_2"] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{O}^{\oplus 5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{tikzcd}\right\}$$

Отсюда немедленно получается

Теорема 17.14. *Расслоение Хоррокса–Мамфорда является когомологией монады* $0\to\mathcal{O}(2)^{\oplus 5}\to\Omega^2(5)^{\oplus 2}\to\mathcal{O}(3)^{\oplus 5}\to 0$.

Покажем теперь, как задать морфизмы в монаде, чтобы ее когоммологией было расслоение Хоррокса–Мамфорда. Пусть $\mathbb{P}^4=\mathbb{P}(V)$ и v_0,v_1,v_2,v_3,v_4 — базис в V. Рассмотрим отображения $\alpha_\pm:V\to\Lambda^2V$, заданные формулами

$$\alpha_+(v_i)=v_{i+2}\wedge v_{i+3},\qquad \alpha_-(v_i)=v_{i+1}\wedge v_{i+4},$$

где все индексы следует понимать по модулю 5. Заметим теперь, что точная последовательность $0\to\Omega\to V^*\otimes\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}\to 0$ дает точные последовательности

$$0\to\Omega^2\xrightarrow{\lambda}\Lambda^2V^*\otimes\mathcal{O}(-2)\to V^*\otimes\mathcal{O}(-1),$$
$$V\otimes\mathcal{O}(-4)\to\Lambda^2V\otimes\mathcal{O}(-3)\xrightarrow{\mu}\Omega^2\to 0.$$

(вторая из них получается из первой сопряжением и подкруткой на -5, так как $\Omega^2=\Omega^4\otimes\Lambda^2T=\Lambda^2T(-5)$). Рассмотрим теперь морфизмы

$$a:V\otimes\mathcal{O}(2)\xrightarrow{\alpha_+,\alpha_-}\Lambda^2V\otimes\mathcal{O}(2)^{\oplus 2}\xrightarrow{\mu}\Omega^2(5)^{\oplus 2},$$
$$b:\Omega^2(5)^{\oplus 2}\xrightarrow{\lambda}\Lambda^2V^*\otimes\mathcal{O}(3)^{\oplus 2}\xrightarrow{-\alpha_-^*,\alpha_+^*}V^*\otimes\mathcal{O}(3)$$

Лемма 17.15. *Морфизм a — вложение расслоений, b — сюръекция,* $b\circ a=0$.

Доказательство: Пусть в точке $u\in\mathbb{P}(V)$ найдется $v=\sum x_iv_i\in V$, такой что $\mu(\alpha_+(v))=\mu(\alpha_-(v))=0$. Так как слой пучка Ω_2 в точке u отождествляется с $\Lambda^2V/V\wedge u$, то это означает, что $\alpha_+(v)=w_+\wedge u$, $\alpha_-(v)=w_-\wedge u$ для каких-то векторов $w_+,w_-\in V$. Но тогда $\alpha_+(v)\wedge\alpha_-(v)=0$. Однако, легко видеть, что $\alpha_+(v)\wedge\alpha_-(v)=\sum x_i^2v_{i+1}\wedge v_{i+2}\wedge v_{i+3}\wedge v_{i+4}$, откуда получаем $x_i^2=0$ для всех i, то есть $v=0$. Значит a — вложение расслоений. Далее, легко видеть, что морфизм b сопряжен к a относительно стандартной симплектической формы на $\mathbb{C}^2$, поэтому b — сюръекция. Наконец, по определению значение композиции $b\circ a$ в точке $u\in\mathbb{P}(V)$ на векторе v_i равно $\alpha_+^*(\alpha_-(v_i)\wedge u)-\alpha_-^*(\alpha_+(v_i)\wedge u)\in V^*$. спаривая с вектором $v_j\in V$, получаем $(\alpha_+(v_j)\wedge\alpha_-(v_i)-\alpha_-(v_j)\wedge\alpha_+(v_i))\wedge u$. Но $\alpha_+(v_j)\wedge\alpha_-(v_i)-\alpha_-(v_j)\wedge\alpha_+(v_i)=v_{j+2}\wedge v_{j+3}\wedge v_{i+1}\wedge v_{i+4}-v_{j+1}\wedge v_{j+4}\wedge v_{i+2}\wedge v_{i+3}$. При $i\ne j$ каждое из слагаемых равно нулю, а при $i=j$ равны сами слагаемые. В обоих случаях получаем ноль. $\square$

Таким образом, следующая последовательность является монадой.

$$0\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}(2)\xrightarrow{a}\Omega^2(5)^{\oplus 2}\xrightarrow{b}V^*\otimes\mathcal{O}(3)\longrightarrow 0$$

Упражнение 17.16. Докажите, что **(1)** когомология E этой монады является стабильным расслоением ранга 2 с $c_1=5$, $c_2=10$. **(2)*** множество нулей общего сечения расслоения E является гладким двумерным тором.

19. Многообразие модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$.

Дл построения многообразия модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $c_1 = 0$ и $c_2 = m$ мы воспользуемся их монадным описанием, полученным на прошлой лекции, то есть тем, что всякое такое полустабильное расслоение является когомологией монады

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{b} H' \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0, \qquad (*)$$

где $\dim H = \dim H' = m$, $\dim K = 2m+2$. Первый вопрос — насколько однозначно такая монада определяется расслоением.

Определение. Пусть $0 \to A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \to 0$ и $0 \to B_1 \xrightarrow{b_1} B_2 \xrightarrow{b_2} B_3 \to 0$ — две монады. Гомоморфизмом монад (из A в B) называется набор гомоморфизмов $f_i : A_i \to B_i$, коммутирующий с дифференциалами, то есть такой, что $b_i \circ f_i = f_{i+1} \circ a_i$, $i = 1, 2$ (иначе говоря, это гомоморфизм комплексов).

Ясно, что гомоморфизм монад индуцирует гомоморфизм их когомологий. При некоторых условиях верно и обратное.

Лемма 19.1. *Пусть* $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ *и* $0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$ *— точные тройки. Если* $\mathrm{Hom}(C_3, D_2) = \mathrm{Ext}^1(C_3, D_2) = 0$, *то любой морфизм* $C_1 \to D_1$ *однозначно продолжается до морфизма точных троек* $C_\bullet \to D_\bullet$, *а если* $\mathrm{Hom}(C_2, D_1) = \mathrm{Ext}^1(C_2, D_1) = 0$, *то любой морфизм* $C_3 \to D_3$ *однозначно продолжается до морфизма точных троек* $C_\bullet \to D_\bullet$.

Доказательство: Пусть $\phi \in \mathrm{Hom}(C_1, D_1)$. Компонируя его с вложением $D_1 \to D_2$, получаем $\phi' : C_1 \to D_2$. Применим к точной тройке $C_\bullet$ функтор $\mathrm{Hom}(-, D_2)$. Получим изоморфизм $\mathrm{Hom}(C_2, D_2) \cong \mathrm{Hom}(C_1, D_1)$, значит ϕ' можно единственным способом поднять до $\phi'' : C_2 \to D_2$. Компонируя его с проекцией $D_2 \to D_3$, получим $\phi''' : C_2 \to D_3$, причем его композиция с $C_1 \to C_2$ по построению равна композиции ϕ с $D_1 \to D_2 \to D_3$, то есть нулю. Применяя теперь к $C_\bullet$ функтор $\mathrm{Hom}(-, D_3)$, получаем точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(C_3, D_3) \to \mathrm{Hom}(C_2, D_3) \to \mathrm{Hom}(C_1, D_3)$, из которой следует, что ϕ''' поднимается единственным способом до $\phi'''' : C_3 \to D_3$. Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Лемма 19.2. *Пусть* $0 \to A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \to 0$ *и* $0 \to B_1 \xrightarrow{b_1} B_2 \xrightarrow{b_2} B_3 \to 0$ *— две монады, а* E *и* F *— их когомологии. Если выполнено условие* $\mathrm{Ext}^q(A_i, B_j) = 0$ *при* $i > j$ *и всех* q, *то всякий гомоморфизм из* E *в* F *индуцируется единственным гомоморфизмом монад.*

Доказательство: Воспользуемся точными последовательностями:

$$\begin{aligned} &0 \to \mathrm{Ker}\, a_2 \to A_2 \to A_3 \to 0, \quad 0 \to A_1 \to \mathrm{Ker}\, a_2 \to E \to 0, \\ &0 \to \mathrm{Ker}\, b_2 \to B_2 \to B_3 \to 0, \quad 0 \to B_1 \to \mathrm{Ker}\, b_2 \to F \to 0, \end{aligned}$$

Применяя к первой из них функтор $\mathrm{Hom}(-, B_1)$ сразу получаем изоморфизмы $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, a_2, B_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Ker}\, a_2, B_1) = 0$. Пусть теперь $\phi \in \mathrm{Hom}(E, F)$. Применяя к правому столбцу предыдущую лемму, получаем $\phi' : \mathrm{Ker}\, a_2 \to \mathrm{Ker}\, b_2$ и $\phi'' : A_1 \to B_1$. Применяя теперь ту же лемму к левому столбцу (и учитывая, что $\mathrm{Hom}(A_3, B_2) = \mathrm{Ext}^1(A_3, B_2) = 0$), получаем $\phi''' : A_2 \to B_2$ и $\phi'''' : A_3 \to B_3$. Ясно, что морфизмы ϕ'', ϕ''' и ϕ'''' задают морфизм монад $A_\bullet \to B_\bullet$. $\square$

Другой спопсоб доказать лемму такой:

Упражнение 19.3. Пусть $A_\bullet$ и $B_\bullet$ — две монады. Постройте спектральную последовательность $E_1^{p,q} = \oplus_{j-i=p} \operatorname{Ext}^q(A_i, B_j) \Longrightarrow E^n = \operatorname{Ext}^n(E, F)$. В частности, если $\operatorname{Ext}^{>0}(A_i, B_j) = 0$, то $\operatorname{Ext}^q(E, F)$ вычисляются комплексом $0 \to \oplus_i \operatorname{Hom}(A_i, B_i) \to \operatorname{Hom}(A_1, B_2) \oplus \operatorname{Hom}(A_2, B_3) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3) \to 0$.

Это утверждение является частным случаем следующего

Упражнение 19.4. Пусть $A^\bullet$ и $B^\bullet$ — два комплекса. Постройте две спектральные последовательности, сходящиеся к одному и тому же, и начинающиеся с членов $E_1^{p,q} = \oplus_{j-i=p} \operatorname{Ext}^q(A^i, B^j)$ и $E_2^{p,q} = \oplus_{j-i=p} \operatorname{Ext}^q(H^i(A^\bullet), H^j(B^\bullet))$.

Отсюда легко следует единственность монады, представляющей расслоение.

Лемма 19.5. *Пусть $0 \to H_1 \otimes \mathcal{O}(-1) \to K_1 \otimes \mathcal{O} \to H_1' \otimes \mathcal{O}(1) \to 0$ — монада, когомология которой изоморфна когомологии монады $(*)$. Тогда сами монады тоже изоморфны.*

Доказательство: Пусть E и E_1 — когомологии монад, а $f : E \to E_1$ и $g : E_1 \to E$ — взаимно обратные изоморфизмы. Легко видеть, что наши монады удовлетворяют условиям леммы 19.2. Поэтому морфизмы f и g поднимаются до морфизмов монад. При этом ясно, что морфизмы $f \circ g$ и $g \circ f$ индуцируют тождественные автоморфизмы расслоений E и E_1. Так как каждая из наших монад в паре с собой тоже удовлетворяет условиям леммы 19.2, то $f \circ g$ и $g \circ f$ — тождественные автоморфизмы, значит монады изоморфны. $\square$

Это же рассуждение позволяет установить дополнительную симметрию монады $(*)$. Так как $r(E) = 2$ и $c_1(E) = 0$, то $E \cong E^*$. С другой стороны, ясно, что E^* является когомологией двойственной монады:

$$0 \to {H'}^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to K^* \otimes \mathcal{O} \to H^* \otimes \mathcal{O}(1) \to 0.$$

Так как эта монада в паре с монадой $(*)$ удовлетворяет условиям леммы 19.2, то возникают изоморфизмы $f : H \to {H'}^*$, $g : K \to K^*$ и $h : H' \to H^*$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & K \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"'] & H' \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & {H'}^* \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "b^*"] & K^* \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "a^*"] & H^* \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а на когомологиях индуцируется изоморфизм $\sigma : E \to E^*$. Рассмотрим сопряженную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "h^*"'] & K \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g^*"'] & H' \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & {H'}^* \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r, "b^*"] & K^* \otimes \mathcal{O} \arrow[r, "a^*"] & H^* \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ясно, что этот морфизм монад индуцирует морфизм $\sigma^* : E \to E^*$ на когомологиях. Но σ — кососимметричен (так как возникает из изоморфизма $\Lambda^2 E \cong \mathcal{O}$), поэтому $\sigma^* = -\sigma$. Опять пользуясь леммой 19.2, получаем $h^* = -f$, $g^* = -g$ и $f^* = -h$ (последнее, впрочем, следует из первого). Отождествляя H' с H^* посредством морфизма h, получаем

Теорема 19.6. *Пусть E — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ с $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = m$. Пусть $H = \mathbb{C}^m$ и $K = \mathbb{C}^{2m+2}$ с симплектической* *формой Q, задаваемой изоморфизмом $q: K \to K^*$. Тогда существует тензор $a \in H^* \otimes K \otimes V^*$, т.ч. E является когомологией самодвойственной монады*

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{a^* \circ q} H^* \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0 . \qquad (\dagger)$$

Тензор a единственнен с точностью до действия группы $G = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{SP}(K)$.

Упражнение 19.7. Покажите, что если когомология монады $(\dagger)$ стабильна, то стабилизатор тензора a в группе G равен $\{(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K), (-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)\}$.

Упражнение 19.8. Покажите, что последовательность $(\dagger)$, построенная по тензору $a \in H^* \otimes K \otimes V^*$, является монадой, а ее когомология — стабильным расслоением ранга 2, т.т.т.к. выполняются условия

(a) $\forall 0 \neq v \in V$ морфизм $a(v) \in H^* \otimes K = \mathrm{Hom}(H, K)$ — вложение;
(b) отображение $a(v)^* \circ q \circ a(v) = Q(a(v), a(v)) = 0$ для всех $v \in V$;
(c) отображение $V \otimes H \to K$, индуцированное тензором a сюръективно.

Обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2; 0, m) \subset H^* \otimes K \otimes V^*$ множество тензоров, удовлетворяющих приведенным выше условиям (a), (b) и (c), а через G' — группу $G/\{(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K), (-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)\}$. Мы уже доказали, что множество классов изоморфизма стабильных расслоений ранга 2 с $\mathrm{c}_1 = 0$, $\mathrm{c}_2 = m$ находится в биекции с множеством $\mathcal{A}(2; 0, m)/G'$.

Теорема 19.9. *Многообразие $\mathcal{A}/G'$ гладко, $\dim \mathcal{A}/G' = 4m - 3$.*

Доказательство: Проверим вначале, что $\mathcal{A}$ — гладко. Ясно, что условия (a) и (c) — открытые, поэтому достаточно проверить, что условие (b) накладывает гладкое ограничение, то есть что в любой точке $a \in \mathcal{A}$ дифференциал отображения $f: \mathcal{A} \to \Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*$, $a \mapsto a^* \circ q \circ a = Q(a, a)$ сюръективен. Ясно, что $d_a f : H^* \otimes K^* \otimes V^* \to \Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*$, $\alpha \mapsto \alpha^* \circ q \circ a + a^* \circ q \circ \alpha$. Рассмотрим отображение $D_a(\alpha, \beta) = \beta \circ a + (a^* \circ q) \circ \alpha$, где $\alpha \in H^* \otimes K \otimes V^* = \mathrm{Hom}(H \otimes \mathcal{O}(-1), K \otimes \mathcal{O})$, $\beta \in H^* \otimes K^* \otimes V^* = \mathrm{Hom}(K \otimes \mathcal{O}, H^* \otimes \mathcal{O}(1))$. Ясно, что D_a совпадает с дифференциалом $d_1^{1,0}$ из спектральной последоватльности упражнения 19.3, значит $\mathrm{Coker}\, D_a = \mathrm{Ext}^2(E, E)$, где E — когомология монады $(\dagger)$. Но по двойственности Серра $\mathrm{Ext}^2(E, E) \cong \mathrm{Hom}(E, E(-3))^* = 0$ так как E стабильно. Значит D_a сюръективно. Но

$$d_a(\alpha + (\beta \circ q^{-1})^*) = \alpha^* \circ q \circ a + a^* \circ q \circ \alpha + \beta \circ a - a^* \circ \beta^* = D_a(\alpha, \beta) - D_a(\alpha, \beta)^* .$$

Так как $\Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*$ кососимметрично, получаем сюръективность $d_a f$. Таким образом $\mathcal{A}$ гладко, причем $\dim \mathcal{A} = \dim(H^* \otimes K^* \otimes V^*) - \dim(\Lambda^2 H^* \otimes S^2 V^*) = 3m(2m+2) - 3m(m-1) = 3m(m+3)$. Так как действие группы G' на $\mathcal{A}$ свободно, то $\mathcal{A}/G'$ гладко и $\dim \mathcal{A}/G' = \dim \mathcal{A} - \dim G' = 3m^2 + 9m - m^2 - (m+1)(2m+3) = 4m - 3$. □

Так же как и в начале семестра мы определим функтор $\mathbf{M} = \mathbf{M}(2; 0, m) : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$, сопоставляя схеме S множество классов эквивалентности расслоений $\mathcal{E}$ ранга 2 на $S \times \mathbb{P}^2$, таких что $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{|\{s\} \times \mathbb{P}^2}$ стабильно для всех $s \in S$ и $\mathrm{c}_1(\mathcal{E}_s) = 0$, $\mathrm{c}_2(\mathcal{E}_s) = m$, где отношение эквивалентности задается подкруткой на линейные расслоения, поднятые с S.

Теорема 19.10. *Многообразие $M = M(2; 0, m) := \mathcal{A}(2; 0, m)/G'$ копредставляет функтор $\mathbf{M}(2; 0, m)$, то есть является грубым многообразием модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1 = 0$, $\mathrm{c}_2 = m$.*

Доказательство: Нам надо построить морфизм функторов $\mathbf{M} \to P_M$ и проверить, что он универсален. Пусть $\mathcal{E}$ — расслоение на $S \times \mathbb{P}^2$, соответствующее точке в $\mathbf{M}(S)$. Нам надо построить по нему морфизм $S \to M$. Для этого нам понадобится относительная спектральная последовательность Бейлинсона.

Упражнение 19.11. Рассмотрим диагональ $\Delta : S \times \mathbb{P}^n \to S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ и проекции $p, q : S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to S \times \mathbb{P}^n$. Пусть $\pi : S \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ и $\rho : S \times \mathbb{P}^n \to S$ — проекции. **(1)** Постройте резольвенту пучка $\Delta_* \mathcal{O}_{S \times \mathbb{P}^n}$ на $S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ из пучков $p^* \pi^* \mathcal{O}(-p) \otimes q^* \pi^* \Omega^p(p)$. **(2)** Постройте спектральную последовательности $E_1^{p,q} = \rho^* R^q \rho_*(F \otimes \pi^* \mathcal{O}(p)) \otimes \pi^* \Omega^{-p}(-p) \Longrightarrow E^0 = F$, $E^{\neq 0} = 0$ $(-n \le p \le 0)$ и $E_1^{p,q} = \rho^* R^q \rho_*(F \otimes \pi^* \Omega^{-p}(-p)) \otimes \pi^* \mathcal{O}(p) \Longrightarrow E^0 = F$, $E^{\neq 0} = 0$ $(-n \le p \le 0)$. **(3)** Докажите, что расслоение $\mathcal{E}$ является когомологией монады

$$0 \longrightarrow \rho^* \mathcal{H} \otimes \pi^* \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{A} \rho^* \mathcal{K} \otimes \pi^* \mathcal{O} \xrightarrow{B} \rho^* \mathcal{H}' \otimes \pi^* \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{H} = R^1 \rho_*(\mathcal{E} \otimes \pi^* \mathcal{O}(-2))$, $\mathcal{K} = R^1 \rho_*(\mathcal{E} \otimes \pi^* \Omega^1)$, $\mathcal{H}' = R^1 \rho_*(\mathcal{E} \otimes \pi^* \mathcal{O}(-1))$. **(4)** Докажите, что расслоение $\mathcal{E}$ является когомологией монады

$$0 \longrightarrow \rho^* \mathcal{H} \otimes \pi^* \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{A} \rho^* \mathcal{K} \otimes \pi^* \mathcal{O} \xrightarrow{A^* \circ q} \rho^* (\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{L}) \otimes \pi^* \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{L} = \rho_*(\det \mathcal{E})$ и $q : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{L}$ — кососимметричный изоморфизм.

Пусть $A \in \Gamma(S, \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{K}) \otimes V^*$ — тензор, задающий монаду расслоения $\mathcal{E}$. Для каждой точки $s \in S$ возьмем ее окрестность $U \subset S$, над которой расслоения $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ тривиализуются, выберем их тривиализации $\mathcal{H}_{|U} \cong H \otimes \mathcal{O}_U$, $\mathcal{K}_{|U} \cong K \otimes \mathcal{O}_U$ и $\mathcal{L}_{|U} \cong \mathcal{O}_U$ и рассмотрим отображение $U \to \mathcal{A}$, $x \mapsto A(x) \in H^* \otimes K \otimes V^*$. Ясно, что эти отображения склеиваются в отображение $S \to \mathcal{A}/G' = M$. Заметим, что при подкрутке расслоения $\mathcal{E}$ на линейное расслоение, поднятое с S, монада подкручивается на это же расслоение, но A не меняется, поэтому мы получаем отображение $\mathbf{M}(S) \to P_M(S)$. Оно очевидно функториально по S, то есть дает морфизм функторов $\mathbf{M} \to P_M$.

Покажем, что этот морфизм универсален. Пусть $\mathbf{M} \to P_X$ — произвольный морфизм функторов. Нам надо построить морфизм $P_M \to P_X$, то есть отображение $M \to X$. Рассмотрим на $\mathcal{A} \times \mathbb{P}^2$ универсальную монаду

$$0 \longrightarrow H \otimes \pi^* \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{A} K \otimes \pi^* \mathcal{O} \xrightarrow{A^* \circ q} H^* \otimes \pi^* \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0, \qquad (\ddagger)$$

полагая $A(a) = a$. Ее когомология $\mathcal{E}$ лежит в $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, поэтому морфизм функторов $\mathbf{M} \to P_X$ дает нам элемент в $P_X(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, X)$, то есть отображение $\mathcal{A} \to X$. Далее, ясно, что задавая на пространствах H и K естественные действия группы $G = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{SP}(K)$, получаем G-эквивариантную структуру на монаде $(\ddagger)$, которая индуцирует G-эквивариантную структуру на ее когомологии $\mathcal{E}$. Значит $g^* \mathcal{E} \cong \mathcal{E}$, то есть построенный морфизм $\mathcal{A} \to X$ инвариантен относительно G и, следовательно, пропускается через $\mathcal{A}/G = \mathcal{A}/G' = M$. По построению видно, что композиция $\mathbf{M} \to P_M \to P_X$ совпадает с морфизмом $\mathbf{M} \to P_X$. $\square$

Теорема 19.12. *Если m нечетно, то $M = \mathcal{A}/G'$ является тонким многообразием модулей.*

Доказательство: Ясно, что нам достаточно построить на $M \times \mathbb{P}^2$ универсальное расслоение, а для этого достаточно на $M \times \mathbb{P}^2$ построить универсальную монаду. Естественный способ — попытаться проверить, что монада $(\ddagger)$

на $\mathcal{A} \times \mathbb{P}^2$ опускается на $M \times \mathbb{P}^2$. Так как $M = \mathcal{A}/G'$, для этого достаточно построить G'-эквивариантную структуру на ($\ddagger$). Действие группы G, построенное выше, не годится, так как элемент $(-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)$ действует умножением на (-1). Сделаем так, подберем линейное представление L группы G, на котором этот элемент тоже действует умножением на (-1) и подкрутим монаду ($\ddagger$) на L. На ней появится G'-эквивариантная структура, которая позволит опустить монаду на $M \times \mathbb{P}^2$. В качестве L можно взять $\det H$. $\square$

Упражнение 19.13. Покажите, что если m четно, то на всяком линейном представлении группы G элемент $(-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)$ действует тождественно.

Поэтому, многообразие модулей $M(2; 0, m)$ при четном m не является тонким (вообще говоря, это не доказательство, а объяснение; доказательство требует более тонкого анализа).

В заключение объясним, как строить многообразие модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с нечетным c_1.

Упражнение 19.14. Докажите, что если E — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $\mathrm{c}_1(E) = -1$, $\mathrm{c}_2(E) = m$, то E является когомологией монады

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \Omega^1(1) \xrightarrow{b} H' \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

где $\dim H = \dim H' = m - 1$, $\dim K = m$.

Упражнение 19.15. Докажите, что если E — стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ с $\mathrm{c}_1(E) = -1$, $\mathrm{c}_2(E) = m$, то E является когомологией монады

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\quad a \quad} K \otimes \Omega^1(1) \xrightarrow{a^* \circ (q \otimes \tau)} H^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

где $q : K \to K^*$ — симметричный изоморфизм, $\tau : \Omega^1(1) \to T(-2)$ — антисимметричный изоморфизм, а $a \in H^* \otimes K \otimes V$ — тензор, такой что

(a1) $\forall 0 \ne h \in H$ морфизм $a(h) \in K \otimes V = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ имеет ранг ≥ 2;

(b1) отображение $a(\xi_1)^* \circ q \circ a(\xi_2) - a(\xi_2)^* \circ q \circ a(\xi_1) = 0$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in V^*$.

и a определен однозначно с точностью до действия группы $G = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{O}(K)$.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2; -1, m) \subset H^* \otimes K \otimes V$ — множество тензоров, удовлетворяющих условиям (a1) и (b1).

Упражнение 19.16. Докажите, что стабилизатор всякой точки $a \in \mathcal{A}$ в группе G состоит из элементов $(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K)$ и $(-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)$, так что группа $G' = G/\{(\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_K), (-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)\}$ действует на $\mathcal{A}$ свободно.

Упражнение 19.17. Докажите, что $\mathcal{A}/G'$ гладко и $\dim \mathcal{A}/G' = 4m - 4$.

Упражнение 19.18. Докажите, что $M(2; -1, m) := \mathcal{A}(2; -1, m)/G'$ является грубым многообразием модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с классами Чженя $\mathrm{c}_1(E) = -1$, $\mathrm{c}_2(E) = m$.

Упражнение 19.19. **(1)** Постройте на $\mathcal{A} \times \mathbb{P}^2$ универсальную монаду с G-эквивариантной структурой. **(2)** Покажите, что если m четно (нечетно), то на $\det K$ (соотв. $\det H$) элемент $(-\mathrm{id}_H, -\mathrm{id}_K)$ действует умножением на (-1). **(3)** Докажите, что при всех m многообразие $M(2; -1, m)$ является тонким многообразием модулей.

20. Неприводимость многообразия модулей расслоений на $\mathbb{P}^2$.

На прошлой лекции мы показали, что описание стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ с $c_1 = 0$ и $c_2 = m$ в виде когомологий самодвойственных монад

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{a^* \circ q} H^* \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0$$

приводит к описанию многообразия модулей: $M(2;0,m) \cong \mathcal{A}(2;0,m)/G_0$, где $\mathcal{A}(2;0,m) \subset H^* \otimes K \otimes V^*$ и $G_0 = \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{SP}(K)/\{\pm 1\}$. В принципе, сведение обычных монад к самодвойственным совершенно не обязательно. Для доказательства неприводимости удобнее воспользоваться другим описанием.

Из того, что всякое стабильное расслоение ранга 2 с $c_1 = 0$ и $c_2 = m$ является когомологией монады

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{b} H^* \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0\,, \qquad (*)$$

можно вывести, что $M(2;0,m) \cong \mathcal{A}'/G'_0$, где $\mathcal{A}'$ — множество всех $(a,b) \in H^* \otimes K \otimes V^* \oplus K^* \otimes H^* \otimes V^*$, удовлетворяющих условиям

- (a′) $\forall 0 \neq v \in V$ морфизм $a(v) \in H^* \otimes K = \mathrm{Hom}(H,K)$ — вложение, а морфизм $b(v) \in K^* \otimes H^* = \mathrm{Hom}(K,H^*)$ — сюръекция;
- (b′) отображение $b(v) \circ a(v) = 0$ для всех $v \in V$;
- (c′) отображение $K \to H^* \otimes V^*$, индуцированное тензором b инъективно;

по свободному действию группы $G'_0 = (\mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(K) \times \mathrm{GL}(H^*))/\mathbb{C}^*$.

Упражнение 20.1. Докажите, что вложение $\mathcal{A}(2;0,m) \to \mathcal{A}'(2;0,m)$, при котором $a \mapsto (a, a^* \circ q)$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{A}(2;0,m)/G_0 \to \mathcal{A}'(2;0,m)/G'_0$.

В этом описании удобно отфакторизофать по действию группы $\mathrm{GL}(K)$. Для этого рассмотрим отображение $\mathcal{A}' \to \mathrm{Hom}(V \otimes V, H^* \otimes H^*)$, $(a,b) \mapsto \gamma_{a,b}$, где $\gamma_{a,b}(v \otimes w) = b(w) \circ a(v)$.

Лемма 20.2. *Образ построенного отображения лежит в* $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$, *и состоит из всех* $\gamma \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$, *таких что*

- (a″) $\forall 0 \neq v \in V$ *морфизм* $\gamma_v : H \to H^* \otimes V^*$ — *вложение;*
- (b″) $\forall 0 \neq v \in V$ *морфизм* $\gamma'_v : V \otimes H \to H^*$ — *сюръекция;*
- (c″) *ранг отображения* $\hat{\gamma} : V \otimes H \to H^* \otimes V^*$ *равен* $2m+2$*;*

а слои — орбиты действия группы $\mathrm{GL}(K) \subset G'_0$.

Доказательство: Заметим, что $\gamma_{a,b}(v \otimes v) = b(v) \circ a(v) = 0$. Так как тензоры $v \otimes v$ порождают $S^2 V$, заключаем, что $\gamma_{a,b}$ лежит в $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$. То, что $\gamma_{a,b}$ удовлетворяет условиям (a″)–(c″), а отображение $\mathrm{GL}(K)$-эквивариантно, очевидно. Покажем как по γ построить a и b. Выберем изоморфизм $K \cong \mathrm{Im}\,\hat{\gamma}$ и получим $a : V \otimes H \to K$, $b : K \to H^* \otimes V^*$. Выполнение условий (a′)–(c′) очевидно. Кроме того, ясно что произвол в выборе a и b состоит в выборе изоморфизма $K \cong \mathrm{Im}\,\hat{\gamma}$, поэтому слои — орбиты группы $\mathrm{GL}(K)$. □

Определение. Отображение $\gamma \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, H^* \otimes H^*)$, удовлетворяющее условиям (a″)–(c″), называется стабильным кронекеровым модулем.

Множество всех стабильных кронекеровых модулей обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_m$.

Следствие 20.3. *Многообразие модулей* $M(2;0,m)$ *изоморфно фактору* $\mathcal{C}_m/G''_0$ *по свободному действию группы* $G''_0 = (\mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(H^*))/\mathbb{C}^*$.

Важность кронекеровых модулей демонстрируется следующей леммой.

Лемма 20.4. *Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^2$, соответствующее стабильному кронекеровому модулю $\gamma \in \mathcal{C}_m$, $L \subset \mathbb{P}^2$ — прямая, и $v \neq w \in L$. Положим $k = m - \operatorname{rang}(\gamma(v \wedge w) : H \to H^*)$. Тогда $E_{|L} \cong \mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(-k)$.*

Доказательство: Рассмотрим подкрученное на $\mathcal{O}(-1)$ ограничение на L монады $(*)$, соответствующей расслоению E,

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}_L(-2) \xrightarrow{a} K \otimes \mathcal{O}_L(-1) \xrightarrow{b} H^* \otimes \mathcal{O}_L \longrightarrow 0,$$

и используем ее для вычисления $H^n(E(-1)_{|L})$. К этим когомологиям сходится спектральная последовательность, второй член которой — когомологии членов подкрученного ограничения монады. Он имеет вид

$$E_2^{\bullet,\bullet} = \left\{ \begin{tikzcd} H \arrow[drr, "d_2"] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^* \end{tikzcd} \right\}$$

Отсюда видно, что $\dim H^0(E(-1)_{|L}) = \dim H^1(E(-1)_{|L}) = m - \operatorname{rang}(d_2)$, так что осталось связать d_2 и $\gamma_{a,b}(v \wedge w)$. Для этого рассмотрим L как подпространство в V, так что v, w — его базис, и пусть x, y — двойственный базис в L^*. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}_L(-2) \arrow[r, "\binom{x}{y}"] \arrow[d, equal] & (H \oplus H) \otimes \mathcal{O}_L(-1) \arrow[r, "{(y,-x)}"] \arrow[d, "{(a(v),a(w))}"] & H \otimes \mathcal{O}_L \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{a,b}(v\wedge w)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H \otimes \mathcal{O}_L(-2) \arrow[r, "a"] & K \otimes \mathcal{O}_L(-1) \arrow[r, "b"] & H^* \otimes \mathcal{O}_L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Коммутативность первого квадрата (т.е. $a = a(v)x + a(w)y$) очевидна, так как $v \otimes x + w \otimes y = \mathrm{id}_L$. Коммутатвиность второго доказывается аналогично: $b \circ (a(v), a(w)) = (b(v)x + b(w)y) \circ (a(v), a(w)) = (b(w) \circ a(v)y, b(v) \circ a(w)x) = \gamma_{a,b}(v \wedge w)(y, -x)$. Мы воспользовались тем, что $b(v) \circ a(v) = b(w) \circ a(w) = 0$ и $b(w) \circ a(v) = -b(v) \circ a(w) = \gamma_{a,b}(v \wedge w)$. В силу функториальности спектральной последовательности, получаем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "d_2'"] \arrow[d, equal] & H \arrow[d, "\gamma_{a,b}(v\wedge w)"] \\ H \arrow[r, "d_2"] & H^* \end{tikzcd}$$

где d_2' — второй дифференциал из спектральной последовательности, построенной по верхней строке нашей диаграммы. Так как верхняя строка точна, эта спектральная последовательность сходится к нулю, поэтому d_2' — изоморфизм, значит $\operatorname{rang}(d_2) = \operatorname{rang}(\gamma_{a,b}(v \wedge w))$. $\square$

Обозначим через $\mathcal{C}^L \subset \mathcal{C}$ — множество всех стабильных кронекеровых модулей γ, для которых ранг $\gamma(\Lambda^2 L) = m$. Ясно, что это открытое G_0''-инвариантное подмножество в $\mathcal{C}$, а фактор $M^L := \mathcal{C}^L / G_0'' \subset \mathcal{C}/G_0''$ — открытое подмножество всех стабильных расслоений E, для которых $E_{|L} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.

Упражнение 20.5. Покажите, что множества M^L для разных L составляют покрытие многообразия M, причем $M^{L_1} \cap M^{L_2} \neq \emptyset$ для всех L_1 и L_2.

Поэтому, для проверки неприводимости многообразия $M(2;0,m)$ достаточно убедиться в неприводимости многообразия $\mathcal{C}^L$. Выберем базис v_1, v_2, v_3 в V и пусть $L = \langle v_1, v_2 \rangle$. Тогда γ запишется в виде матрицы

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ -\gamma_{12} & 0 & \gamma_{23} \\ -\gamma_{13} & -\gamma_{23} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\dagger)$$

где $\gamma_{ij} = \gamma(v_i \wedge v_j) \in \mathrm{Hom}(H, H^*)$. Ясно, что $\mathcal{C}^L$ можно описать как множество всех таких троек $(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$, для которых выполняются условия (a$''$)–(c$''$) и γ_{12} — изоморфизм. Поскольку нас интересует неприводимость, а условия (a$''$) и (b$''$) очевидно открытые, мы можем (и будем!) их игнорировать. Остается только ранговое условие на матрицу ($\dagger$). Прежде чем его переформулировать, произведем дополнительную редукцию. Рассмотрим отображение $\mathcal{C}^L \to \mathrm{Iso}(H, H^*)$, $\gamma \mapsto \gamma_{12}$. Ясно, что оно $\mathrm{GL}(H^*)$-эквивариантно. Но действие группы $\mathrm{GL}(H^*)$ на множестве $\mathrm{Iso}(H, H^*)$ транзитивно и свободно, поэтому достаточно проверить неприводимость слоя над какой-либо точкой.

Лемма 20.6. *Слой отображения $\mathbb{C}^L \to \mathrm{Iso}(H, H^*)$ равен (открытому подмножеству в) $\{(A, B) \in \mathrm{End}(H) \oplus \mathrm{End}(H) \mid r([A, B]) = 2\}$.*

Доказательство: Опишем слой над точкой $\gamma_{12} \in \mathrm{Iso}(H, H^*)$. Отождествим H с H^* посредством γ_{12}. Тогда матрица ($\dagger$) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H & A \\ -\mathrm{id}_H & 0 & B \\ -A & -B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H & \gamma_{13}\gamma_{12}^{-1} \\ -\mathrm{id}_H & 0 & \gamma_{23}\gamma_{12}^{-1} \\ -\gamma_{13}\gamma_{12}^{-1} & -\gamma_{23}\gamma_{12}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\ddagger)$$

Чтобы вычислить ранг этой матрицы, произведем элементарные преобразования столбцов, прибавляя к последнему столбцу первый, умноженный (слева) на B, и второй, умноженный (слева) на $-A$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_H & 0 \\ -\mathrm{id}_H & 0 & 0 \\ -A & -B & -[A, B] \end{pmatrix}.$$

Ее ранг очевидно равен $2m + r([A, B])$ и лемма доказана. $\square$

Таким образом, неприводимость многообразия модулей следует из

Теорема 20.7 (Хулек). *Множество $F_r = \{(A, B) \mid r([A, B]) = r\}$ неприводимо для любого $r \geq 2$.*

Этим мы и займемся. Напомним, что оператор A называется регулярным, если $\dim Z_A = m$, где $Z_A = \{C \in \mathrm{End}(H) \mid [A, C] = 0\}$ — его централизатор. Известно, что множество регулярных операторов открыто и плотно в $\mathrm{End}(H)$.

Лемма 20.8. *Множество F_r° пар $(A, B) \in F_r$, таких что A регулярен, плотно (в классической топологии) в F_r.*

Доказательство: Пусть $(A, B) \in F_r$. Найдем регулярный оператор A_0 в Z_B (его легко построить, воспользовавшись теоремой о жордановой нормальной форме) и рассмотрим прямую $\{(A + tA_0, B)\} \subset F_r$. Так как свойство регулярности открыто (по Зарискому), найдется сколь угодно малое t, такое что $A + tA_0$ регулярен, поэтому $(A + tA_0, B) \in F_r^\circ$. $\square$

Согласно лемме достаточно проверить неприводимость множества F_r°. А для этого достаточно проверить связность множества $F_r' = F_r^\circ \setminus \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$ (если

$F_r^\circ = Z_1 \cup Z_2$ — объединение компонент, то $Z_1 \cap Z_2 \subset \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$, поэтому $Z_1 \setminus \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$ и $Z_2 \setminus \mathrm{Sing}(F_r^\circ)$ — непересекающиеся замкнутые подмножества в F_r', объединение которых равно F_r'). Рассмотрим проекцию $p : F_r' \to \mathrm{End}(H)$, $(A, B) \mapsto A$. Легко видеть, что ее образ содержит открытое множество, и значит связен.

Упражнение 20.9. Покажите, что образ p содержит множество всех операторов, все собственные значения которых различны.

С другой стороны, в окрестности каждой точки $(A, B) \in F_r'$ множество F_r' задается $(m-r)^2$ уравнениями (выберем базис пространства H, в котором коммутатор $[A, B] = I_r$, где I_r — стандартная матрица ранга r), тогда F_r' задается занулением окаймляющих миноров размера $(r+1)\times(r+1)$, которых ровно $(m-r)^2$ штук). Значит размерность многообразия F_r' в окрестности всякой точки не меньше чем $2m^2 - (m-r)^2$. Поэтому в силу следующей леммы достаточно проверить, что все слои морфизма p связны и имеют размерность $2m^2 - (m-r)^2 - m^2 = 2mr - r^2$.

Лемма 20.10. *Пусть $p : X \to Y$ морфизм, причем размерность X в окрестности всякой точки $\geq d$, Y связное, и все слои морфизма p связные размерности $\leq d - \dim Y$. Тогда X связно.*

Доказательство: Пусть $X = X_1 \sqcup X_2$ — объединение компонент связности. Если $p(X_i)$ содержится в замкнутом подмножестве в Y, то размерность общего слоя X_i над Y строго больше чем $\dim X_i - \dim Y$, что противоречит условию. Так как $p(X_i)$ конструктивно в Y, то оно содержит открытое подмножество Y. Следовательно $p(X_1)$ и $p(X_2)$ имеют непустое пересечение (так как Y связно). Но тогда слой над точкой пересечения образов несвязен, что также противоречит условиям. □

Обозначим $F_A = \{B \mid r([A, B]) = r\} = p^{-1}(A)$ — слой над регулярным оператором A.

Лемма 20.11. *Морфизм $F_A \to \mathrm{End}(H)$, $B \mapsto [A, B]$ является m-мерным векторным расслоением над $C_A = \{D \in \mathrm{End}(H) \mid r(D) = r,\ \mathsf{Tr}(D \cdot Z_A) = 0\}$.*

Доказательство: Заметим, что если $D = [A, B]$ и $C \in Z_A$, то $\mathsf{Tr}(D \cdot C) = \mathsf{Tr}(ABC) - \mathsf{Tr}(BAC) = \mathsf{Tr}(BCA) - \mathsf{Tr}(BAC) = \mathsf{Tr}(B[C, A]) = 0$, поэтому образ морфизма лежит в C_A. Кроме того, морфизм линеен по B, а его ядро равно Z_A, поэтому образ — линейное подпространство коразмерности $\dim Z_A$. Но уравнения $\mathsf{Tr}(D \cdot Z_A)$ как раз задают подпространство коразмерности $\dim Z_A$, поэтому образ равен C_A. Наконец, A регулярен, поэтому $\dim Z_A = m$. □

Таким образом, остается установить неприводимость множества C_A. Оно является пересечением множества матриц ранга r с линейным подпространством. Рассмотрим отображение $\mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(H) \to \mathrm{End}(H)$, $(X, Y) \mapsto XI_rY$, где I_r — стандартная матрица ранга r. Поскольку оно сюръективно, то достаточно изучить множество $\{(X, Y) \in \mathrm{GL}(H) \times \mathrm{GL}(H) \mid \mathsf{Tr}(XI_rYZ_A) = 0\}$. Так как нас интересует неприводимость, можно отбросить открытое условие невырожденности матриц X и Y и доказывать неприводимость множества

$$C_A' = \{(X, Y) \in \mathrm{End}(H) \times \mathrm{End}(H) \mid \mathsf{Tr}(XI_rYZ_A) = 0\}.$$

Выберем базис, в котором оператор A принимает жорданову нормальную форму, то есть A блочно диагональная с жордановыми клетками $A_1, \ldots, A_s$

на диагонали. Пусть $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$ — соответствующее разложение пространства H, так что $A_i \in \mathrm{End}(H_i)$. Пусть $M_i = \mathrm{Hom}(H, H_i) \oplus \mathrm{Hom}(H_i, H)$, а $C_i' = \{(X, Y) \in M_i \mid \mathsf{Tr}(XI_rYZ_{A_i}) = 0\}$.

Лемма 20.12. *Имеем* $C_A' = C_1' \times C_2' \times \cdots \times C_s'$.

Доказательство: Ясно, что $\oplus Z_{A_i} \subset Z_A$, поэтому из регулярности оператора A вытекает равенство $\oplus Z_{A_i} = Z_A$ (размерность централизатора жордановой клетки равна ее размеру). Далее, если $(X, Y) \in \mathrm{End}(H) \times \mathrm{End}(H)$, то $X = \oplus X_i$, $Y = \oplus Y_i$, где $(X_i, Y_i) \in M_i$, причем $\mathsf{Tr}(X_i I_r Y_i Z_{A_j}) = 0$ при $i \neq j$. □

Итак, пусть $\dim H_i = t$, $(x_{ij}, y_{kl})_{1 \le i,l \le t,\ 1 \le j,k \le m}$ — естественные координаты в M_i. Тогда $A_i = \lambda E + D$, где $E = \mathrm{id}_{H_i}$, а D — жорданова клетка с собственным значением нуль, а $Z_{A_i} = \langle E, D, D^2, \ldots, D^{t-1}\rangle$. Легко видеть, что отображение $f : M_i \to \mathbb{C}^t$, $(X, Y) \mapsto (\mathsf{Tr}(XI_rY), \mathsf{Tr}(XI_rYD), \ldots, \mathsf{Tr}(XI_rYD^{t-1}))$ в координатах принимает вид

$$f(x_{ij}, y_{kl}) = \left(\sum_{1 \le i \le t,\ 1 \le j \le r} x_{ij} y_{ji}, \sum_{2 \le i \le t,\ 1 \le j \le r} x_{ij} y_{j,i-1}, \ldots, \sum_{1 \le j \le r} x_{tj} y_{j1} \right)$$

Обозначим $Q_{t,m}^r = f^{-1}(0)$.

Лемма 20.13. *Дифференциал* df *не сюръективен в тех и только в тех точках* $(x_{ij}, y_{kl}) \in M_i$, *в которых* $x_{t1} = \cdots = x_{tr} = y_{11} = \cdots = y_{r1} = 0$.

Доказательство: Для каждого $1 \le k \le r$ рассмотрим минор $(\partial f_p / \partial y_{kl})_{l=1}^t$:

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial y_{kl}}\right) = \begin{pmatrix} x_{1k} & x_{2k} & \ldots & x_{t-1,k} & x_{tk} \\ x_{2k} & x_{3k} & \ldots & x_{tk} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{t-1,k} & x_{tk} & \ldots & 0 & 0 \\ x_{tk} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично, для каждого $1 \le j \le r$ рассмотрим минор $(\partial f_p / \partial x_{ij})_{i=1}^t$:

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial y_{kl}}\right) = \begin{pmatrix} y_{j1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ y_{j2} & y_{j1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{j,t-1} & y_{j,t-2} & \ldots & y_{j1} & 0 \\ y_{jt} & y_{j,t-1} & \ldots & y_{j2} & y_{j1} \end{pmatrix}$$

Все остальные частные производные равны нулю. □

Лемма 20.14. $\mathrm{codim}_{M_i} Q_{t,m}^r = t$, $\mathrm{codim}_{Q_{t,m}^r} \mathrm{Sing}(Q_{t,m}^r) = \begin{cases} 2r-1, & \text{\textit{при} } t = 1 \\ 2r-2, & \text{\textit{при} } t \ge 2 \end{cases}$

Доказательство: При $t = 1$ множество $Q_{t,m}^r$ задается одним уравнением $\sum_{j=1}^r x_{1j} y_{j1} = 0$, а множество $\mathrm{Sing}(Q_{t,m}^r)$ уравнениями $x_{11} = \cdots = x_{1r} = y_{11} = \cdots = y_{r1} = 0$, откуда все следует. При $t = 2$ множество $Q_{t,m}^r$ задается двумя уравнениями $\sum_{j=1}^r x_{2j} y_{j1} = \sum_{j=1}^r (x_{1j} y_{j1} + x_{2j} y_{j2}) = 0$, а множество $\mathrm{Sing}(Q_{t,m}^r)$ уравнениями $x_{21} = \cdots = x_{2r} = y_{11} = \cdots = y_{r1} = 0$, откуда также все следует.

Далее воспользуемся индукцией по t. Пусть $t \geq 3$. Заметим, что $\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})$ задается уравнениями $x_{t1} = \cdots = x_{tr} = y_{11} = \cdots = y_{r1} = 0$, а также

$$\sum_{2\leq i\leq t-1,\ 1\leq j\leq r} x_{ij}y_{ji} = \sum_{3\leq i\leq t-1,\ 1\leq j\leq r} x_{ij}y_{j,i-1} = \cdots = \sum_{1\leq j\leq r} x_{t-1,j}y_{j2} = 0,$$

в которые не входят переменные $x_{11}, \ldots, x_{1m}, x_{t,r+1}, \ldots, x_{r,m}$, а также переменные $y_{r+1,1}, \ldots, y_{m,1}, y_{1t}, \ldots, y_{m,t}$. Отсюда получаем $\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m}) \cong Q^r_{t-2,m} \times \mathbb{C}^{4m-2r}$, значит $\dim(\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})) = 2(t-2)m-(t-2)+4m-2r = 2tm-t-(2r-2)$, откуда $\mathrm{codim}_{M_i}(\mathrm{Sing}(Q^r_{t,m})) = t + (2r-2)$. Остается заметить, что $Q^r_{t,m}$ задается t уравнениями, которые в общей точке независимы, а коразмерность множества особенностей строго больше t. $\square$

Теперь все следует из следующей

Лемма 20.15 (Хартсхорн). *Пусть X — полное пересечение в проективном пространстве $\mathbb{P}^N$, $\dim X \geq 2$. Если $\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$, то X неприводимо.*

Доказательство: Пусть $X = Z_1 \cup Z_2$, $\emptyset \neq Z_i \neq X$. Тогда $Z_1 \cap Z_2 \subset \mathrm{Sing}(X)$. Пусть $P \subset \mathbb{P}^N$ — общее линейное подпространство, $\mathrm{codim}\, P = \dim X - 1$. Тогда $P \cap \mathrm{Sing}(X) = \emptyset$, и по теореме Бертини $P \cap X$ — связная кривая. Значит для какого-то i имеем $P \cap Z_i \subset P \cap (Z_1 \cap Z_2) = \emptyset$, что невозможно по соображнениям размерности. $\square$

Доказательство теоремы: Рассмотрим $\mathbb{P}(Q^r_{t,m}) \subset \mathbb{P}(M_i)$. Оно удовлетворяет предположениям леммы Хартсхорна, так как $2r-2 \geq 2$ при $r \geq 2$, и значит неприводимо. Поэтому неприводимо и само $Q^r_{t,m}$. $\square$