Векторные расслоения на проективных пространствах

Экзамен

1. Опишите тип расщепления расслоения нулевой корреляции на всех прямых.

2. Докажите, что всякое расслоение Танго на $\mathbb{P}^3$ изоморфно расслоению нулевой корреляции.

3. Опишите тип расщепления расслоения Танго на $\mathbb{P}^4$ на всех прямых.

4. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая коника. Найдите тип расщепления

a) $T_{\mathbb{P}^n|C}$;

b) $N_{C/\mathbb{P}^n}$.

5. Рассмотрим вложение $i : C = \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $(u : v) \mapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$. Кривая такого вида называется скрученной кубикой.

a) Постройте точную последовательность вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to i_*\mathcal{O}_C \to 0$$

(выпишите явно все отображения).

b) Докажите, что $T_{\mathbb{P}^3|C} \cong \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(4)$.

c) Докажите, что $N_{C/\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}(5) \oplus \mathcal{O}(5)$.

d) Докажите, что две скрученные кубики пересекаются тогда и только тогда, когда они лежат в общей кубической гиперповерхности (в том числе, возможно, особой).

6. Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_m$ — m попарно скрещивающихся прямых в $\mathbb{P}^3$, а E — расслоение ранга 2, построенное по $Z = L_1 \sqcup L_2 \sqcup \cdots \sqcup L_m$ с помощью конструкции Серра. Вычислите когомологии всех подкруток $E(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, и найдите тип расщепления расслоения E на всех прямых при

a) $m = 1$;

b) $m = 2$;

c) $m \geq 3$.

7. Опишите тип расщепления расслоения Хоррокса–Мамфорда на всех прямых.