

## “Векторные расслоения на проективных пространствах”

### Контрольная работа

1. Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — две прямые в проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$ . Для всех случаев их взаимного положения и всех  $p \in \mathbb{Z}$  вычислите:

- a)  $\text{Tor}_p(\mathcal{O}_{L_1}, \mathcal{O}_{L_2})$ ;
- b)  $\text{Ext}^p(\mathcal{O}_{L_1}, \mathcal{O}_{L_2})$ ;
- c)  $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_{L_1}, \mathcal{O}_{L_2})$ .

2. Пусть  $d \geq 0$  и  $V = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ .

- a) Докажите, что естественный гомоморфизм  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$  сюръективен.
- b) Пусть  $F$  — его ядро. Вычислите  $H^\bullet(\mathbb{P}^1, F)$ .
- c) Докажите, что  $F$  локально свободен и найдите его тип расщепления.

3. Пусть  $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2))$ .

- a) Докажите, что естественный гомоморфизм  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$  сюръективен.
- b) Пусть  $F$  — его ядро. Докажите, что  $F$  локально свободен и найдите его тип расщепления.

4. Вычислите пространство  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$  и для каждого элемента  $\varepsilon \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$  найдите тип расщепления расслоения  $E_\varepsilon$  из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \rightarrow E_\varepsilon \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow 0,$$

соответствующей элементу  $\varepsilon$ .