

“Векторные расслоения на проективных пространствах”

Контрольная работа

1. Пусть L_1 и L_2 — две прямые в проективном пространстве \mathbb{P}^3 . Для всех случаев их взаимного положения и всех $p \in \mathbb{Z}$ вычислите:

- a) $\text{Tor}_p(\mathcal{O}_{L_1}, \mathcal{O}_{L_2})$;
- b) $\text{Ext}^p(\mathcal{O}_{L_1}, \mathcal{O}_{L_2})$;
- c) $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_{L_1}, \mathcal{O}_{L_2})$.

2. Пусть $d \geq 0$ и $V = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$.

- a) Докажите, что естественный гомоморфизм $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ сюръективен.
- b) Пусть F — его ядро. Вычислите $H^\bullet(\mathbb{P}^1, F)$.
- c) Докажите, что F локально свободен и найдите его тип расщепления.

3. Пусть $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2))$.

- a) Докажите, что естественный гомоморфизм $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$ сюръективен.
- b) Пусть F — его ядро. Докажите, что F локально свободен и найдите его тип расщепления.

4. Вычислите пространство $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ и для каждого элемента $\varepsilon \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ найдите тип расщепления расслоения E_ε из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \rightarrow E_\varepsilon \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow 0,$$

соответствующей элементу ε .