ФКН ВШЭ, 3-й модуль 2024–2025. Алгоритмические вопросы алгебры

Домашнее задание №2
Крайний срок сдачи: 19 марта 2025, 13:00
Сдаётся по e-mail на atalambutsa@hse.ru или на бумаге перед началом лекции.
Опоздание на A минут снижает оценку на $\lceil A/120 \rceil \cdot 20\%$, где $\lceil x \rceil$ – округление x вверх.

2.1 Найдите нетривиальное соотношение между матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

для а) $\alpha = \frac{1}{2}$, б) $\alpha = \frac{1}{3}$.

2.2 Решите уравнение $(XY)^3 = aZ^2bc$ в свободном моноиде $FM_3 = \{a, b, c\}^*$.

2.3 Пусть $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n \in \Sigma^+$, где $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_r\}$, а символ $*$ не лежит в Σ. Верно ли, что для набора $\{(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)\}$ существует решение МПСП тогда и только тогда, когда для набора $\{(*[A_1], *[B_1]*), (*[A_1], [B_1]*), (*[A_2], [B_2]*), \ldots, (*[A_n], [B_n]*), (**, *)\}$ есть решение МПСП? (Если верно — докажите, если нет — приведите контрпример).

Здесь использованы следующие обозначения из лекций (также см. учебник М.Сипсера):

$$\begin{aligned} *[a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s}] &= *a_{i_1} * a_{i_2} * \ldots * a_{i_s} \\ [a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s}]* &= a_{i_1} * a_{i_2} * \ldots * a_{i_s} * \\ *[a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s}]* &= *a_{i_1} * a_{i_2} * \ldots * a_{i_s} * \end{aligned}$$

2.4 Докажите, что следующая задача алгоритмически неразрешима при $n \geqslant 9$: по данному набору целочисленных матриц $A_1, \ldots, A_m$ размера $n \times n$ и вектору $\overline{v} \in \mathbb{Z}^n$ определить, существует ли такая последовательность матриц $A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}$, что $A_{i_1} \ldots A_{i_s} \overline{v} = \overline{0}$.

2.5 Докажите, что отображения $f(x) = x/2$ и $f(x) = (x+2)/3$ порождают свободную полугруппу в полугруппе вещественнозначных функций с операцией композиции $\circ$.