

5.1 Порождает ли множество $\{aab, aa, ab\}$ свободный подмоноид в $FM_2 = \langle a, b \rangle_+$?

5.2 Докажите, что в свободном моноиде любого ранга $r \geq 1$ существуют подмоноиды, не являющиеся свободными ни для какого набора порождающих.

5.3 Докажите, что матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix},$$

порождают свободный моноид при любых $a, b \geq 1$.

5.4 Докажите, что матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

не порождают свободный моноид.

5.5 Решите уравнение $X^2 = aY^2$ в свободном моноиде $FM_2 = \langle a, b \rangle_+$.

5.6 Докажите, что если $X^2 = Y^3$ в FM_2 , то для некоторого $Z \in FM_2$ выполнено $X = Z^3, Y = Z^2$.

5.7 Решите уравнение $X^2 = aY^3$ в свободном моноиде FM_2 .

5.8 Докажите, что если $XY = YX$ в FM_2 , то для некоторого $Z \in FM_2$ и $s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено $X = Z^s, Y = Z^t$.