7.1 (Теорема А.А.Маркова мл., 1948) Докажите, что не существует алгоритма, который по двум данным на вход наборам матриц $A_1, \ldots, A_m \in SL_4(\mathbb{Z})$ и $B_1, \ldots, B_n \in SL_4(\mathbb{Z})$ проверяет, существует ли матрица C, выразимая в обоих наборах, т.е. такая, что

$$C = A_{i_1} \ldots A_{i_s} = B_{j_1} \ldots B_{j_t}, \text{ где } i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, m\} \text{ и } j_1, \ldots, j_j \in \{1, \ldots, n\}.$$

(Напоминание: $SL_n(\mathbb{Z})$ — это группа целочисленных матриц с определителем 1).

7.2 Докажите, что в задаче 7.1 второй набор можно взять состоящим из матриц

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_1' & 0 \\ 0 & B_1' \end{bmatrix} \text{ и } B_2 = \begin{bmatrix} B_2' & 0 \\ 0 & B_2' \end{bmatrix}, \text{ где}$$

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.3 Пусть $\Gamma = \{a_1, a_2\}$ — фиксированный бинарный алфавит. Определим отображение $\sigma : \Gamma^* \to \mathbb{N}$ следующим образом: $\sigma(\varepsilon) = 0$ и $\sigma(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} i_j 2^{k-j}$.
Докажите, что σ — инъективное отображение, для которого выполнено

$$\sigma(UV) = 2^{|V|}\sigma(U) + \sigma(V).$$

7.4 Используя отображение σ из задачи 7.3, определим отображение $\gamma : \Gamma^* \times \Gamma^* \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$$\gamma(U, V) = \begin{bmatrix} 1 & \sigma(V) & \sigma(U) - \sigma(V) \\ 0 & 2^{|V|} & 2^{|U|} - 2^{|V|} \\ 0 & 0 & 2^{|V|} \end{bmatrix}.$$

а) Докажите, что отображение γ инъективно, т.е. при $(U_1, V_1) \neq (U_2, V_2)$ выполнено

$$\gamma(U_1, V_1) \neq \gamma(U_2, V_2).$$

б) Докажите, что отображение γ является морфизмом, т.е. для любых (U_1, V_1) и (U_2, V_2) выполнено

$$\gamma(U_1 U_2, V_1 V_2) = \gamma(U_1, V_1) \cdot \gamma(U_2, V_2).$$

7.5 Пусть

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что полугруппа $\langle D_1, D_2 \rangle$, порождённая матрицами D_1 и D_2, состоит в точности из матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma(V) & 0 \\ 0 & 2^{|V|} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{|V|} \end{bmatrix},$$

где $V \in \Gamma^+$.

7.6 (Теорема Халавы-Харью, 2007). Используя алгоритмическую неразрешимость ПСП и результаты задач 7.4, 7.5, докажите, что алгоритмически неразрешима следующая задача. Пусть дан набор $\mathcal{B}$, состоящий из матриц $B_1, B_2, \ldots, B_m \in GL_3(\mathbb{Q})$; требуется проверить, существует ли матрица, лежащая в пересечении полугрупп $\langle \mathcal{B} \rangle_+$ и $\langle D_1, D_2 \rangle_+$.