8.1 Докажите, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

порождают свободный моноид.

8.2 Пусть матрицы A и B — верхнетреугольные размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix},$$

и при этом $\det A = 0$. Докажите, что A и B не порождают свободный моноид.

8.3 Докажите, что если набор матриц $A_1, \ldots, A_m \in GL_n(\mathbb{Q})$ не порождает свободный моноид, то существуют два различных кортежа индексов одинаковой длины $i_1, \ldots, i_s$ и $j_1, \ldots j_s$, такие что $A_{i_1} \ldots A_{i_s} = A_{j_1} \ldots A_{j_s}$.

8.4 Докажите, что при $m \geqslant 2$ матрицы $A_1, \ldots, A_m \in GL_n(\mathbb{Q})$ порождают свободный моноид тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ матрицы $\lambda A_1, \ldots, \lambda A_m$ порождают свободный моноид.

8.5 Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Тогда моноид $\langle A, B \rangle_+$ свободен тогда и только тогда, когда свободен моноид $\langle \lambda A, \mu B \rangle_+$.

Всюду далее используются матрицы

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B(b) = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.6 Докажите, что если в полугруппе $\langle A(a), B(b) \rangle_+$ существует матрица $T = \{t\}_{ij}$, для которой $t_{11} = 1$, то эта полугруппа не является свободной.

8.7 Докажите, что проблема свободности для 2-порождённых подмоноидов верхнетреугольных матриц размера 2×2 сводится к этой же проблеме для матриц вида $A(a), B(b)$. (Подсказка: попробуйте найти подходящую матрицу C и перейти к CAC^{-1}, CBC^{-1}.)

8.8 Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$ все четыре моноида $\langle A(a), B(b) \rangle_+$, $\langle A(b), B(a) \rangle_+$, $\langle A(1/a), B(1/b) \rangle_+$, $\langle A(1/b), B(1/a) \rangle_+$ либо свободны, либо не свободны одновременно.