9.1 Докажите, что не существует инъективного морфизма из моноида $FM_2 \times FM_2$ в полугруппу матриц 2×2 над полем комплексных чисел.
(Подсказка: может помочь рассмотрение жордановой нормальной формы и множества матриц $C(X)$, коммутирующих с данной матрицей X.)

Всюду далее используются матрицы

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B(b) = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2 Докажите, что если в полугруппе $\langle A(a), B(b) \rangle_+$ существует матрица $T = \{t\}_{ij}$, для которой $t_{11} = 1$, то эта полугруппа не является свободной.

9.3 Докажите, что проблема свободного порождения для 2-порождённых подмоноидов верхнетреугольных матриц размера 2×2 сводится к этой же проблеме для матриц вида $A(a), B(b)$.

9.4 Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$ все четыре моноида $\langle A(a), B(b) \rangle_+$, $\langle A(b), B(a) \rangle_+$, $\langle A(1/a), B(1/b) \rangle_+$, $\langle A(1/b), B(1/a) \rangle_+$ либо свободны, либо не свободны одновременно.

9.5 Докажите, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

порождают группу матриц $SL(2, \mathbb{Z})$, то есть любой элемент этой группы представим в виде произведения матриц A, B, A^{-1}, B^{-1}.

9.6 Используя предыдущую задачу, докажите, что любое уравнение в моноиде FM_2 сводится к системе диофантовых уравнений в целых числах.

9.7 Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ между матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/n & 1 \end{pmatrix}$$

существует нетривиальное соотношение вида $C^x D^y C^z D^t = D^t C^z D^y C^x$, где x, y, z, t — натуральные числа.