

Повторный Экзамен

26 февраля

Если не сказано иначе, во всех задачах A — коммутативное кольцо.

Задача 1

Пусть $\mathbf{k}$ — поле, $A = \mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ — кольцо многочленов Лорана, $K = K(A)$ — поле частных. Докажите, что если $f \in K$ — целый над A элемент, то он лежит в A .

Задача 2

Пусть $A \subset B$, где B — кольцо, и пусть $f \in A[t]$ — приведенный многочлен (многочлен со старшим коэффициентом 1). Докажите, что если f раскладывается в произведение приведенных многочленов $f = g \cdot h$ в кольце $B[t]$, то коэффициенты g и h являются целыми элементами над A .

Задача 3

Пусть A — нетерово кольцо, P — конечно порожденный проективный модуль над A , а $\mathfrak{p}$ — простой идеал. Докажите, что найдется $f \notin \mathfrak{p}$, такой что P_f — свободный модуль над A_f . (Подсказка: вспомните теорему про связь Нот и локализации.)

Задача 4

Пусть $A = \mathbf{k}[x, y, u, w]$, где $\mathbf{k}$ — поле. Найдите ассоциированные простые идеалы для идеала $I = (x) \cdot (x, y) \cdot (x, y, u) \cdot (x, y, u, w)$.

Задача 5

Пусть $A = \mathbf{k}[x, y]/(x^2 - y^3)$, где $\mathbf{k}$ — поле. Вычислите глобальную размерность A .

Задача 6

Пусть $(A, \mathfrak{m})$ — нетерово локальное кольцо, а $f, g \in \mathfrak{m}$ — такие элементы, что f не является делителем нуля, а образ g не является делителем нуля в $A/(f)$. Докажите, что g не является делителем нуля, в то время как образ f не является делителем нуля в $A/(g)$.