Задание #3

19 сентября

Напомним, что алгеброй над кольцом A называется кольцо B вместе с гомоморфизмом $f : A \to B$. В частности, на кольце B возникает структура A-модуля. Морфизм в категории A-алгебр — это гомоморфизм колец, такой что соответствующий треугольник коммутативный.

Задача 1

Пусть B и C — пара A-алгебр. Докажите, что на $B \otimes_A C$ существует единственная структура A-алгебры, такая что отображения $B \to B \otimes_A C$, $b \mapsto b \otimes 1$ и $C \to B \otimes_A C$, $c \mapsto 1 \otimes c$ — гомоморфизмы колец, вместе с которыми тензорное произведение становится копроизведением в категории A-алгебр.

Задача 2

Рассмотрим конечное расширение L/K полей. Докажите, что L сепарабельно тогда и только тогда, когда в кольце $L \otimes_K L$ нет нильпотентных элементов.

Задача 3

Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец. Напомним, что $f^* : A{-}\mathrm{Mod} \to B{-}\mathrm{Mod}$ — функтор, отправляющий A-модуль M в $B \otimes_A M$, а $f_* : B{-}\mathrm{Mod} \to A{-}\mathrm{Mod}$ — функтор ограничения. Докажите, что $f^* \dashv f_*$.

Задача 4

Докажите, что функтор локализации коммутирует с бесконечными прямыми суммами, но не всегда коммутрирует с бесконечными прямыми произведениями.

Задача 5

Пусть $F : A{-}\mathrm{Mod} \to B{-}\mathrm{Mod}$ — *аддитивный функтор* (иначе говоря, отображения $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(F(M), F(N))$ — гомоморфизмы абелевых групп). Докажите, что $F(0) = 0$, а для любых $M, N \in A{-}\mathrm{Mod}$ выполнено $F(M \oplus N) \simeq F(M) \oplus F(N)$.

Задача 6

Пусть $F : A{-}\mathrm{Mod} \to B{-}\mathrm{Mod}$ и $G : B{-}\mathrm{Mod} \to A{-}\mathrm{Mod}$ — пара сопряженных функторов. Докажите, для обоих функторов выполнено условие предыдущей задачи (сохранение нулевого объекта и прямых сумм).