Задание #4

26 сентября

Напомним, что модуль M над кольцом коммутативным A называется *конечно представимым,* если существует точная справа последовательность $A^{\oplus m} \to A^{\oplus n} \to M \to 0$. Кроме того, модуль M называется *инъективным,* если функтор $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ — точный.

Задача 1

Рассмотрим короткую точную последовательность A-модулей

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0.$$

Докажите, что если модули M_1 и M_3 конечно представимы, то модуль M_2 конечно представим.

Задача 2

Докажите, что фактор конечно представимого модуля по конечно порожденному подмодулю конечно представим.

Задача 3

Пусть P — проективный модуль над A. Докажите, что P является прямым слагаемым в свободном модуле, то есть существует такой модуль Q, что $P \oplus Q \simeq F$ для некоторого свободного модуля $F = \bigoplus_\alpha A$.

Задача 4

Докажите, что модуль I инъективен тогда и только тогда, когда для любого идеала $J \subset A$ всякий морфизм $J \to I$ продолжается до морфизма $A \to I$. (Указание: для мономорфизма $\phi : M \hookrightarrow N$ и произвольного $\psi : M \to I$ рассмотрите частично упорядоченное множество подмодулей $\mathrm{Im}\,\phi \subseteq N' \subseteq N$, таких что ψ пропускается через N').

Задача 5

Докажите, что абелевы группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ — инъективные $\mathbb{Z}$-модули. Докажите, что всякая абелева группа вкладывается в инъективную в качестве подгруппы.

Задача 6

Докажите, что пересечение всех максимальных идеалов кольца состоит их множества таких $b \in A$, что $1 + ab$ обратим для всех $a \in A$.