Задание #6

31 октября

Задача 1

Пусть $A = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy - z^2)$. Докажите, что идеал $\mathfrak{p} = (x, z)$ — простой, но идеал $\mathfrak{p}^2$ не является примарным.

Задача 2

Пусть A — коммутативное кольцо, $N \subsetneq M$ — $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. Докажите, что $N = \pi^{-1}(N_{\mathfrak{q}})$, где $\pi : M \to M_{\mathfrak{q}}$ — отображение локализации.

Задача 3

Пусть $\phi : A \to B$ — целый гомоморфизм колец. Докажите, что прообраз максимального идеала $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} B$ — максимальный.

Задача 4

Пусть $\phi : A \to B$ — инъективный целый гомоморфизм колец. Докажите, что отображение $\phi^{-1} : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ сюръективно. (Указание: локализуйте и воспользуйтесь предыдущей задачей.)

Задача 5

Пусть A — коммутативное кольцо, $I \subset A$ — идеал, $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$, $i = 1, \ldots, n$ — набор простых, такой что $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что $I \not\subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$.

Задача 6

Пусть A — область целостности. Докажите, что всякий модуль над A плоский тогда и только тогда, когда A — поле.