Задание #7

29 ноября

Задача 1

Пусть I — инъективный $\mathbb{Z}$-модуль. Докажите, что для всякого $M \subseteq I$ модуль I/M также инъективный.

Задача 2

Пусть дана коммутативная диаграмма A-модулей

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "k"] & L \end{tikzcd}$$

Докажите, что она декартова тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$0 \to K \xrightarrow{(g,f)} N \oplus M \xrightarrow{(k,-h)} L.$$

Докажите, что она кодекартова тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$K \xrightarrow{(g,-f)} N \oplus M \xrightarrow{(k,h)} L \to 0.$$

Задача 3

Докажите, что для любых абелевых групп A и B группа $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ является группой кручения.

Задача 4

Докажите, что абелева группа является плоской над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда в ней нет кручения.

Задача 5

Докажите, что для любого кольца A и пары идеалов $I, J \subset A$ имеется изоморфизм $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq (I \cap J)/IJ$.

Задача 6

Пусть $m, n > 0$ — целые числа, причем $n^2 | m$. Вычислите $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/m}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n)$.