Логика и алгоритмы -2012.

Задание 1

1. Докажите следующие равенства:
$(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus(B\setminus C) = A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

2. *Упорядоченную пару* множеств (x,y) определим как $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

а) Докажите, что $(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Leftrightarrow (x_1=x_2 \wedge y_1=y_2)$.

б) Определите упорядоченную тройку множеств и проверьте для неё аналогичное свойство.

3. Докажите следующие равенства:

а) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$,

б) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

4. Верны ли следующие утверждения для любых множеств X,Y?

а) $\mathcal{P}(X)\subset\mathcal{P}(Y) \Rightarrow X\subset Y$.

б) $\bigcup X=\bigcup Y \Rightarrow X=Y$.

5. Подмножество $A \subset \mathbf{R}$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой $x\in A$ оно содержит интервал $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$, для некоторого $\varepsilon>0$. Множество $A\subset \mathbf{R}$ *замкнуто*, если $\mathbf{R}\setminus A$ открыто. Докажите, что

а) Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.

б) Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

в) Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

г) Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

д) Пересечение бесконечного семейства открытых множеств не всегда открыто.

6. Проверьте, что канторовское множество C обладает следующими свойствами:

а) C замкнуто;

б) $\forall x\in C\ \forall\varepsilon>0\ ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap C\neq\{x\}$ (т.е. C *не содержит изолированных точек*);

в) для любого интервала $I\subset[0,1]$ найдётся подинтервал $J\subset I$ такой, что $J\cap C=\varnothing$ (т.е. C *нигде не плотно*).

7. Даны конечные множества A и B из n и m элементов, соответственно. Найдите количество

а) всех подмножеств A;

б) всех k-элементных подмножеств A;

в) бинарных отношений между A и B;

г) функций из A в B;

д) инъективных функций из A в B.

8. Докажите, что всякое отображение множеств $f: A\to B$ можно представить в виде композиции $g\cdot h$, где g - инъекция, h - сюръекция.

9. Пусть $f: A\to B$ и $g: B\to A$ - отображения, такие что $g\cdot f = 1_A$ (тождественное отображение). Докажите, что f - инъекция, а g - сюръекция.

10. а) Постройте отношение A на 3-элементном множестве $\{x,y,z\}$, такое что A рефлексивно и транзитивно, но не симметрично.

б) Постройте нетранзитивное отношение на 2-элементном множестве $\{x,y\}$.

в) Постройте отношение C на 3-элементном множестве $\{x,y,z\}$, такое что C рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

г) Постройте отношение D на 2-элементном множестве {x,y}, такое что D транзитивно и симметрично, но не рефлексивно.

11. Постройте биекции:

а) между прямой **R** и открытым интервалом]0,1[;

б) между (сплошным) замкнутым квадратом и замкнутым кругом;

в) между открытым кругом и плоскостью;

г) между открытым интервалом]0,1[и замкнутым интервалом [0,1].

12. Пусть X - множество всех ненулевых векторов плоскости, ↑↑ - отношение сонаправленности. Установите биекцию между X/↑↑ и окружностью радиуса 1.

13. Постройте биекцию между множеством **N×N** и множеством всех натуральных чисел, которые делятся на 2 и 3 и не делятся на другие простые числа.

14. Постройте биекцию между множеством решений двойного неравенства $1 \le x^2+y^2 \le 4$ и произведением двух отрезков $[0,1] \times [0,1]$.