Логика и алгоритмы -2012.

Задание 2 (срок - 5.10)

15. Постройте непустое множество X, такое что $\bigcup X = X$.

16. Используя теорему Кантора - Бернштейна, докажите равномощность следующих множеств:

а) всех интервалов различных видов на прямой,

б) открытого и замкнутого круга на плоскости,

в) окружности и прямой,

г) всех сплошных прямоугольников на плоскости.

$X \lesssim Y$ *обозначает, что существует инъекция X в Y .*

17. Докажите, что если $B \lesssim C$, то

а) $A^B \lesssim A^C$, б) $B^A \lesssim C^A$.

18. Докажите, что если $A \cap B = \varnothing$, то $C^{A\cup B} \sim C^A \times C^B$.

19. Докажите, что $(A\times B)^C \sim A^C \times B^C$.

20. Докажите, что $(A^B)^C \sim A^{B\times C} \sim (A^C)^B$.

21. а) Докажите, что если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathscr{P}(A \cup B) \sim \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$.

б) Выведите отсюда, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (теорема Кантора).

22. Докажите, что множество всех иррациональных чисел имеет мощность континуума.

23. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума.

24. Докажите, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{R}^n$ для всех натуральных $n > 0$.

25. а) Докажите, что $\mathscr{P}(A)^B \sim \mathscr{P}(A \times B) \sim \mathscr{P}(B)^A$.

б) Докажите, что $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.

26. Докажите, что

а) множество всех конечных подмножеств множества **N** счетно,

б) множество всех счетных подмножеств данного счетного множества имеет мощность континуума.

в) множество всех конечных подмножеств множества **R** имеет мощность континуума,

г) множество всех счетных подмножеств множества **R** имеет мощность континуума.

27. а) Докажите, что $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$

б) Докажите, что $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.

28. Докажите, что $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} \sim \mathbf{N}^{\mathbf{R}} \sim \mathscr{P}(\mathbf{R})$.

29. Существует ли множество $X \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{N})$ мощности континуума, такое что для всех $A,B\in X$ либо $A \subset B$, либо $B \subsetneq A$?

30. Не используя континуум-гипотезу, докажите, что если $X \subset \mathbf{R}^2$, то хотя бы одно из множеств X, $\mathbf{R}^2\setminus X$ имеет мощность континуума.

31. Докажите, что множество всех открытых подмножеств **R** имеет мощность континуума.