Логика и алгоритмы 2012. Задание 4.
Логика высказываний

44. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

    а) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$,

    б) $((p \to q) \to p) \to p$.

45. Запишите формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.

    Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

46. Докажите эквивалентности:

    а) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$,

    б) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,

    в) $\neg(A \to B) \equiv (A \wedge \neg B)$,

    г) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv A$.

47. Найдите более короткую эквивалентную запись для следующих формул:

    а) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))$,

    б) $((p \to q) \to p) \vee ((q \to p) \to q)$.

48. Приведите следующие формулы к СДНФ

    а) $((((p \to q) \to \neg p) \to \neg q) \to \neg r) \to r$,

    б) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to \neg r) \to (p \to \neg q))$,

    в) $((p \to q) \wedge (\neg q \to p)) \vee (r \to p)$.

49. Напишите формулу, зависящую от переменных p, q и r и истинную тогда и только тогда, когда ровно одна из этих переменных истинна.

50. Докажите, что любую функцию на $\{0, 1\}$ от произвольного число аргументов можно записать с помощью конъюнкции, сложения по модулю 2 и константы 1.

51. *Элементарной дизъюнкцией* от переменных $p_1, \ldots, p_n$ называется формула вида

    $$p_1^{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee p_n^{\varepsilon_n}, \text{ где } \varepsilon_1, \ \ldots, \ \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

    Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) от переменных $p_1, \ldots, p_n$ называется конъюнкция элементарных дизъюнкций от этих переменных, а также $\top$. Сформулируйте и докажите правило построения СКНФ по таблице истинности пропозициональной формулы.

52. Пусть $A(p_1, \ \ldots, p_n)$ — пропозициональная формула, построенная из переменных $p_1, \ldots, p_n$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\neg$. *Двойственная формула* $A^\circ(p_1, \ \ldots, p_n)$ получается из нее заменой всех $\wedge$ на $\vee$, а всех $\vee$ — на $\wedge$.

   а) Докажите по индукции, что $A^\circ(p_1, \ \ldots, p_n) \equiv \neg A(\neg p_1, \ \ldots, \neg p_n)$

   б) Докажите, что если $A \equiv B$, то $A^\circ \equiv B^\circ$.

   в) Докажите, что если A — тавтология, то $\neg A^\circ$ — тавтология.

   г) Объясните, как, зная СДНФ для A°, построить СКНФ для A.

53. Докажите, что любая пропозициональная формула эквивалентна формуле, записанной с помощью переменных и штриха Шеффера $A \,|\, B = \neg(A \wedge B)$.

54. Докажите, что

   а) формула $p \vee q$ не эквивалентна никакой формуле, построенной из переменных с помощью $\neg$ и $\leftrightarrow$;

   б) формула $p \to q$ не эквивалентна никакой формуле, построенной из переменных с помощью $\vee$ и $\wedge$.