**Логика и алгоритмы 2012. Задание 5.**
**Логика предикатов**
*Срок сдачи: 9 ноября.*
*Для максимальной положительной оценки нужно сдать 90% задач.*

55. Рассмотрим сигнатуру, содержащую предикатные символы $T$, $\Pi$ (одноместные) и $\in$, $=$, $\perp$ (двуместные). $T(x)$, $\Pi(x)$ читаются соответственно как «$x$ — точка», «$x$ — прямая», а $\in$, $=$, $\perp$ — соответственно как «принадлежит», «равно» и «перпендикулярно». Запишите следующие высказывания в виде формул в этой сигнатуре:

    а) Высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

    б) $x$, $y$, $z$, $t$ — вершины ромба.

    в) $z$ — середина отрезка $[xy]$.

56. Рассмотрим сигнатуру арифметики, содержащую 2-местный предикатный символ $=$ и 2-местные функциональные символы сложения и умножения. Запишите следующие высказывания о натуральных числах в виде формул в этой сигнатуре:

    а) $x \,\vdots\, y$,

    б) $x$ и $y$ являются простыми числами близнецами,

    в) $x$ — натуральная степень числа 2,

    г) китайская теорема об остатках.

57. Выразите следующие множества и предикаты в данных моделях:

    а) $\{0\}$, $\{1\}$, $x = y$ в $(\mathbb{N}, <)$,

    б) $x = y$, $x = y + 1$ в $(\mathbb{Z}, <)$,

    в) $x = 0$, $x = -y$ в $(\mathbb{Z}, +, =)$.

    *Определение.* Пусть $\Omega_a$ — сигнатура с равенством, двуместными функциональными символами $+$, $\cdot$ и константами 0, 1. Пусть $\mathbb{N}$ — ее стандартная модель на множестве всех натуральных чисел. Определимые подмножества $\mathbb{N}$ называются *арифметическими.*

58. Пусть $A$, $B$ — арифметические множества. Докажите, что множества $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}$, $AB = \{ab \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ — арифметические.

59. Докажите, что если множество натуральных чисел составляет арифметическую прогрессию, то оно — арифметическое.

60. Докажите, что если множество натуральных чисел составляет геометрическую прогрессию, то оно — арифметическое.

61. Докажите, что функция $f(x) = [\sqrt{x}]$ (целая часть квадратного корня) — арифметическая.

62. Пусть $A$ — произвольное множество. Рассмотрим модель $(P(A), =, \cap, \cup)$, где «=» — предикат равенства, $\cap$ и $\cup$, соответственно, пересечение и объединение множеств. Запишите формулу, говорящую, что

   а) $x \subseteq y$;

   б) $x$ — одноэлементное множество;

   в) $x$ — двухэлементное множество.

63. Приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме:

   а) $\neg\forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$;

   б) $\forall x \exists y (x = y) \to \exists x \forall y (B(x) \to C(y))$.

64. Общезначимы ли следующие формулы? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

   а) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$;

   б) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$;

   в) $\exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \to \forall x \exists y P(x, y, y)$;

   г) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \to \exists y \forall x P(x, y, y)$.

65. Докажите, что следующие формулы истинны во всякой конечной модели, но не общезначимы:

   а) $\forall x \forall y \forall z (R(x, x) \wedge (R(x, z) \to (R(x, y) \vee R(y, z)))) \to \exists x \forall y R(x, y)$;

   б) $\exists x \forall y \exists z ((Q(y, z) \to Q(x, z)) \to (Q(x, x) \to Q(y, x)))$.

66. Постройте формулу в сигнатуре $\{=, <\}$, все модели которой — 2-элементные линейные порядки.