

Логика и алгоритмы 2012. Дополнительные задачи.
Логика предикатов

246. Рассмотрим сигнатуру, содержащую предикатные символы T, Π (одноместные) и $\in, =, \perp$ (двуместные). $T(x), \Pi(x)$ читаются соответственно как « x — точка», « x — прямая», а $\in, =, \perp$ — соответственно как «принадлежит», «равно» и «перпендикулярно». Запишите следующие высказывания в виде формул в этой сигнатуре:
- а) Прямые x, y параллельны.
 - б) Через любые две различные точки проходит единственная прямая.
 - в) x, y, z — вершины треугольника.
247. Рассмотрим сигнатуру элементарной геометрии (из лекции), содержащую предикатные символы B (3-местный), \cong (4-местный) и $=$ (2-местный). $\cong(x, y, z, t)$ записывается как $xy \cong zt$. Запишите следующие высказывания в виде формул в этой сигнатуре:
- а) Треугольник xyz равносторонний.
 - б) Прямые xy, zt параллельны.
 - в) Прямые xy, zt перпендикулярны.
 - г) Угол $\angle xyz$ равен 60° .
248. Рассмотрим сигнатуру арифметики, содержащую 2-местный предикатный символ $=$ и 2-местные функциональные символы сложения и умножения. Запишите следующие высказывания о натуральных числах в виде формул в этой сигнатуре:
- а) $x = 0$,
 - б) $x = 1$,
 - в) x — простое число.
249. Докажите, что объединение, пересечение и разность двух определимых множеств есть определимое множество.
250. Выразите следующие множества и предикаты в данных моделях: $\{0\}, \{1\}, x = y$ в $(\mathbb{N}, <)$.
251. Приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме:
- а) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$;
 - б) $\neg \forall y (P(x) \rightarrow (x = y \vee \exists x Q(x, y)))$.
252. Общезначимы ли следующие формулы? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.
- а) $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$;
 - б) $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$.