

Логика и алгоритмы 2012. Задание 6.

Логика предикатов

Срок сдачи: 16 ноября.

Для максимальной положительной оценки нужно сдать 90% задач.

67. Выполнимы ли следующие формулы:

а) $\forall x \exists y P(x, y) \wedge \neg \exists y \forall x P(x, y)$,

б) $\neg \exists y \forall x (P(x) \rightarrow P(y))$,

в) $\exists x \forall y (P(x, x) \wedge \neg P(x, y))$.

68. а) Докажите, что существует биекция $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, определяемая в $(\mathbb{N}; +, \cdot)$;

б) Для каждого $k > 0$ постройте определимую биекцию $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$.

69. Рассмотрим модель $(\mathbb{Q}, <, +, =)$.

а) Опишите все автоморфизмы этой модели.

б) Определимы ли следующие предикаты, если да, то запишите соответствующую формулу, если нет, то докажите: $x = 0$, $x = 1$, $x = yz$?

70. Определим ли предикат $x = \{0\}$ в модели $(P(\mathbb{N}), =, \cap, \cup)$?

71. Определим ли предикат $x < y$ в модели $(\mathbb{N}, :)$? А в модели $(\mathbb{Z}, :)$?

72. Определим ли предикат $x = \frac{1}{2}$ в модели $(\mathbb{R}, <, =, 0, 1)$?

73. Придумайте модель с тремя предикатами, в которой каждый предикат выражается через два других, но ни один не выражается через один другой.