Логика и алгоритмы 2012. Задание 7.

Теории первого порядка.

Срок сдачи 30 ноября.

Определение 1. $T \vdash A$ означает, что формула A выводима в теории T. $\vdash A$ означает, что A выводима в исчислении предикатов с равенством. $T \vdash S$ означает, что все формулы из S выводимы в T. $T \equiv S$ означает $T \vdash S$ и $S \vdash T$. Теория T называется *конечно аксиоматизируемой*, если $T \equiv S$ для некоторого конечного множества формул S. T называется *полной*, если T непротиворечива и для любой замкнутой формулы A в языке T имеет место $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

74. Выведите следующие правила в исчислении предикатов (см. стр. 2):
    (a) $T \vdash A(x)$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \forall x\, A(x)$;
    (b) (правило контрапозиции) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\neg B \to \neg A)$;
    (c) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A \to \exists x\, B)$;
    (d) $\vdash \forall x\, (A \to B) \wedge \exists x\, A \to \exists x\, B$.

В решении всех следующих задач можно пользоваться теоремами о полноте и о компактности для логики предикатов.

75. Множество $\mathrm{Th}(M)$ всех предложений истинных в модели M называется *элементарной теорией модели* M. Докажите: теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M для которой $T \equiv \mathrm{Th}(M)$.

76. Докажите, что $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot) \neq \mathrm{Th}(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

77. Докажите, что теория полей нулевой характеристики (a) неполна, (b) не является конечно аксиоматизируемой.

78. Если теория имеет сколь угодно большие (по мощности) конечные модели, то она имеет и некоторую бесконечную модель. Выведите отсюда, что не существует теории, моделями которой являются в точности (a) все конечные циклические группы, (b) все конечные поля.

79. Если формула A выполнена на всех бесконечных группах, то A выполнена на всех конечных группах мощности больше некоторого $n \in \mathbb{N}$.

80. *Спектром* формулы A назовём множество $\{n \in \mathbb{N} \mid A \text{ имеет модель мощности } n\}$.
    (a) Постройте формулу в сигнатуре с равенством, которая имеет спектр $\{2, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$;

(b) Докажите, что совокупность спектров всех формул (произвольной сигнатуры) замкнута относительно операций пересечения и объединения;

(c) Существует ли формула, спектр которой есть множество всех чётных чисел?

81. Пусть $B = \exists x_1 \ldots \exists x_n\, A$ — формула в языке без функциональных символов и констант, где A бескванторна. Докажите, что если B выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

Справка: аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

Аксиомы:

A1. Тавтологии логики высказываний;

A2. $(\forall x A) \to A[x/t]$, если переменные терма t не связываются кванторами при подстановке вместо свободной переменной x в A;

A3. $A[x/t] \to (\exists x A)$, при том же условии;

A4. Аксиомы равенства:

1. $x = x$;
2. $x = y \to y = x$;
3. $x = y \wedge y = z \to x = z$;
4. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n))$;
5. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.

Схему аксиом A1 мы понимаем следующим образом. Если $A(p_1, \ldots, p_n)$ — тавтология и $C_1, \ldots, C_n$ — любые формулы, то формула $A[p_1/C_1, \ldots, p_n/C_n]$ есть аксиома.

Правила вывода: R1. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ R2. $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x B}$ R3. $\dfrac{B \to A}{\exists x B \to A}$

В правилах R2 и R3 переменная x не входит свободно в A.