Логика и алгоритмы 2012. Дополнительные задачи.
Логика предикатов и теории первого порядка.

256. (*) Докажите, что для любого n найдется такое b, что числа $b+1, \ldots, nb+1$ попарно взаимно просты. Более того, b может быть сколь угодно большим. И докажите, что для любого набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ найдутся числа a и b, такие что $a \equiv x_i \ mod \ (bi+1)$ при всех i от 1 до n. И, наконец, докажите, что функция $\beta(a,b,i) \equiv x_i \ mod \ (bi+1)$ арифметична. (Т.е. предикат $x = \beta(a,b,i)$ арифметичен.)

257. (*) Используя функцию β (которая называется β-функцией Гёделя) докажите, что следующие предикаты арифметичны:

   а) одноместный предикат «x есть степень шестерки»;

   б) двуместный предикат $x = 2^y$;

   в) «x есть n-ое по счёту простое число»;

   г) «x есть n-ое по счёту число Фибоначчи»;

   д) $x = n!$;

   е) «m — целая часть числа e^x».

258. Выведите правило силлогизма: если $T \vdash (A \to B)$ и $T \vdash (B \to C)$, то $T \vdash (A \to C)$.

259. Рассмотрим замкнутую формулу $A = \exists x_1 \ldots \exists x_n B$ в сигнатуре без констант и функциональных символов, где B не содержит кванторов. Докажите, что если формула A выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

260. Верно ли утверждение предыдущей задачи для сигнатуры, содержащей только равенство и одноместный функциональный символ?

261. В сигнатуре Σ без констант и функциональных символов дана замкнутая формула A, не содержащая равенства. Докажите, что если формула A имеет конечную модель мощности n, то она имеет конечную модель любой мощности выше n, а также бесконечную модель.

262. Постройте формулу в сигнатуре, содержащей только равенство, спектр которой есть $\{3,4\}$, $\{n \mid n > 3\}$.

263. Существует ли формула в сигнатуре, содержащей только равенство, спектр которой есть множество всех четных чисел?

264. Постройте формулу в сигнатуре с одним трехместным предикатным символом R, которая не является общезначимой, но имеет спектр $\mathbb{N}$.

265. Придумайте теорию, спектр которой равен:

   а) множеству простых чисел;

   б) множеству составных чисел;

   в) множеству степеней двойки;

   г) множеству всех степеней простых чисел.