Логика и алгоритмы 2012. Задание 8.
Логика предикатов
Срок сдачи: 21 декабря.
Для максимальной положительной оценки нужно сдать 90% задач.

В данном листке все теории — в счётной сигнатуре с равенством, все модели — нормальные. Предложение (замкнутая формула) A называется *позитивным*, если оно построено из атомарных формул с помощью связок $\wedge$, $\vee$ и кванторов $\exists$, $\forall$.

82. Для двух моделей M_1 и M_2 одной и той же сигнатуры будем писать $M_1 \lesssim M_2$, если существует гомоморфизм из M_1 в M_2.

    а) Покажите, что отношение $\lesssim$ рефлексивно, транзитивно и не является ни симметричным, ни антисимметричным.

    б) Пусть $M_1 \lesssim M_2$, A — позитивное предложение и $M_1 \models A$. Докажите, что $M_2 \models A$.

Модель (M', Σ) сигнатуры Σ называется *подмоделью* модели (M, Σ), если $M' \subseteq M$, все интерпретации предикатных и функциональных символов модели M' являются ограничениями соответствующих интерпретаций модели M и все интерпретации констант M' совпадают с соответствующими интерпретациями констант модели M. Модель (M', Σ) называется *надмоделью* модели (M, Σ), если (M, Σ) — подмодель (M', Σ).

83. Формула называется *универсальной*, если она имеет вид $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$, где A — бескванторная. Формула называется *экзистенциальной*, если она имеет вид $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$, где A — бескванторная.

    а) Докажите, что любое универсальное предложение сохраняет свою истинность при переходе к подмоделям.

    б) Докажите, что любое экзистенциальное предложение сохраняет свою истинность при переходе к надмоделям.

    в) Докажите, что существует экзистенциальное предложение в сигнатуре с одним одноместным предикатом P, не эквивалентное никакому универсальному предложению. Рассмотрите также случай сигнатуры с одним равенством.

84. Докажите, что

    а) если теория не имеет конечных моделей и любые две её счетные модели изоморфны, то эта теория полна;

б) модели $(\mathbb{R}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ элементарно эквивалентны.

Мы будем говорить, что теория T допускает *элиминацию кванторов*, если для любой формулы существует эквивалентная ей в T бескванторная формула (то есть, если для любой формулы A существует бескванторная формула B, такая что во всех моделях теории T истинна формула $\forall x_1 \ldots \forall x_n (A \leftrightarrow B)$, где список $x_1, \ldots, x_n$ включает все свободные переменные формул A и B).

85. Докажите, что для любого простого числа p теория конечного поля $(\mathbb{F}_p, 0, 1, +, \cdot, =)$ допускает элиминацию кванторов.

86. Докажите, что если в некоторой теории T любая формула вида $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$, где A является конъюнкцией атомарных формул и отрицаний атомарных формул, эквивалентна некоторой бескванторной формуле в T, то теория T допускает элиминацию кванторов.

87. Докажите, что теория модели $(\mathbb{N}, =)$ допускает элиминацию кванторов.

88. Докажите, что теория модели $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ допускает элиминацию кванторов.

89.* Пусть даны две теории T_1 и T_2 такие, что теория $T_1 \cup T_2$ не имеет моделей. Докажите, что найдется такое предложение A, для которого одновременно верно $T_1 \vdash A$ и $T_2 \vdash \neg A$.

90.* Рассмотрим некоторую сигнатуру Ω и допустим, что существуют такие две теории T_1 и T_2, что любая модель M сигнатуры Ω является моделью в точности одной из теорий T_1 или T_2. Докажите, что существует формула A такая, что класс всех моделей формулы A совпадает с классом всех моделей теории T_1.

91.* Дано предложение A в сигнатуре без констант и функциональных символов, которое логически эквивалентно как некоторому универсальному предложению, так и некоторому экзистенциальному предложению. Докажите, что либо A общезначимо, либо $\neg A$ общезначимо.