Логика и алгоритмы -2013.
Задание 1

Обязательные задачи

1. Докажите следующие равенства:

$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash(B\backslash C) = A\backslash(B\cup C)$.

2. *Упорядоченную пару* множеств (x,y) определим как $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

Докажите, что $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \Leftrightarrow (x_1=x_2$ и $y_1=y_2)$.

3. Даны конечные множества A и B из n и m элементов, соответственно. Найдите количество

а) всех подмножеств A;

б) всех функций из A в B;

в) всех инъективных функций из A в B.

4. Постройте отношение C на 3-элементном множестве $\{x,y,z\}$, такое что C рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

5 (письменная). Пусть $f: A\to B$ и $g: B\to A$ - отображения, такие что $g\cdot f = 1_A$ (тождественное отображение). Докажите, что f - инъекция, а g - сюръекция.

6 (письменная). Постройте биекцию между множеством $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ и множеством всех натуральных чисел, которые делятся на 2 и 3 и не делятся на другие простые числа.

Дополнительные задачи

7. Подмножество $A \subset \mathbf{R}$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой $x\in A$ оно содержит интервал $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$, для некоторого $\varepsilon>0$. Множество $A\subset \mathbf{R}$ *замкнуто*, если $\mathbf{R}\backslash A$ открыто. Докажите, что

а) Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.

б) Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

в) Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

г) Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

д) Пересечение бесконечного семейства открытых множеств не всегда открыто.

8. Проверьте, что канторовское множество C обладает следующими свойствами:

а) C замкнуто;

б) $\forall x\in C\ \forall\varepsilon>0\ ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap C\neq\{x\}$ (т.е. C *не содержит изолированных точек*);

в) для любого интервала $I\subset[0,1]$ найдётся подинтервал $J\subset I$ такой, что $J\cap C=\varnothing$ (т.е. C *нигде не плотно*).

9. Докажите, что всякое отображение множеств $f: A\to B$ можно представить в виде композиции $g\cdot h$, где g - инъекция, h - сюръекция.

10. Постройте биекции:

а) между прямой $\mathbf{R}$ и открытым интервалом $]0,1[$;

б) между (сплошным) замкнутым квадратом и замкнутым кругом;

в) между открытым интервалом $]0,1[$ и замкнутым интервалом $[0,1]$.

11. Пусть X - множество всех ненулевых векторов плоскости, $\uparrow\uparrow$ - отношение сонаправленности. Установите биекцию между $X/\uparrow\uparrow$ и окружностью радиуса 1.

12. Постройте биекцию между множеством решений двойного неравенства $1\le x^2+y^2 \le 4$ и произведением двух отрезков $[0,1] \times [0,1]$.

13. Даны множества A,B,C, из которых любые два пересекаются, но никакое из этих множеств не содержится в объединении двух других. Какое наименьшее число элементов может содержать множество $A\cup B\cup C$?

14. Сформулируйте определение неупорядоченной тройки $\{a,b,c\}$. Какие аксиомы нужны, чтобы доказать существование любой такой тройки?

15. Постройте множество A и биекции $f: A\to A$, $g: A\to A$, такие что $f\cdot g = g\cdot f$, но ни одно из отображений f, g, $f\cdot g$ не является тождественным.