

Логика и алгоритмы -2013.

Задание 4

Обязательные задачи

33 (**письменно**). Запишите пропозициональную формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.

Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

34 (**письменно**). Докажите, что любую булеву функцию от произвольного числа аргументов можно записать с помощью конъюнкции, сложения по модулю 2 и константы 1.

35. Найдите более короткую эквивалентную запись для следующих формул:

- а) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))$,
- б) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \vee ((q \rightarrow p) \rightarrow q)$.

36. *Элементарной дизъюнкцией* от переменных p_1, \dots, p_n называется дизъюнкция литералов, в которой каждая из этих переменных встречается ровно один раз. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* от переменных p_1, \dots, p_n называется конъюнкция элементарных дизъюнкций от этих переменных.

Сформулируйте и докажите правило построения СКНФ по таблице истинности пропозициональной формулы.

37. Рассмотрим сигнатуру, содержащую предикатные символы T, Π (одноместные) и $\in, =, \perp$ (двуместные). $T(x), \Pi(x)$ читаются соответственно как " x – точка", " x – прямая", а $\in, =, \perp$ – соответственно как "принадлежит", "равно" и "перпендикулярно".

Запишите следующие высказывания в виде формул в этой сигнатуре:

- а) Высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.
- б) x, y, z, t – вершины ромба.
- в) z – середина отрезка $[xy]$.

Дополнительные задачи

38. Приведите следующие формулы к СДНФ

- а) $(((((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow r)$,
- б) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)) \vee (r \rightarrow p)$.

39. Пусть $A(p_1, \dots, p_n)$ – пропозициональная формула, построенная из переменных p_1, \dots, p_n с помощью связок \wedge, \vee, \neg . *Двойственная формула* $A^\circ(p_1, \dots, p_n)$ получается из нее заменой всех \wedge на \vee , и наоборот.

а) Докажите по индукции, что $A^\circ(p_1, \dots, p_n) \sim \neg A(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$.

б) Докажите, что если $A \sim B$, то $A^\circ \sim B^\circ$.

в) Докажите, что если A – тавтология, то $\neg A^\circ$ – тавтология.

г) Объясните, как по СДНФ для A° , построить СКНФ для A .

40. Докажите, что любая пропозициональная формула эквивалентна формуле, записанной с помощью переменных и *штриха Шеффера* $A|B := \neg(A \wedge B)$.

41. Докажите, что

- а) формула $p \vee q$ не эквивалентна никакой формуле, записанной с помощью

переменных, \leftrightarrow и \neg .

б) формула $p \rightarrow q$ не эквивалентна никакой формуле, записанной с помощью переменных, \vee и \wedge .

42. а) Постройте пропозициональную формулу от переменных p , q , r , изменяющую свое значение при изменении значения ровно одной из этих переменных.

б) Придумайте электрическую схему, при которой свет в комнате включается и выключается любым из трех переключателей, независимо от состояния остальных (переключатель имеет несколько контактов и 2 состояния, в одном из которых соединено одно множество контактов, а в другом - другое).