

## Письменное задание 5: логика

Для сигнатуры с равенством рассматриваются только нормальные модели

- Общезначимы ли следующие формулы? Если да — докажите; если нет -постройте опровергающую модель:
  - $\forall x(P(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x S(x)$ .
  - $\exists x \forall y \exists z R(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y, y)$ .
- Напишите формулу в сигнатуре  $\{<, =\}$ , модели которой — это в точности линейные порядки из 2 элементов.
- Найдите все множества, определимые в модели  $(\mathbf{Q}, <)$ .
- Напишите пропозициональную формулу от переменных  $p, q, r$ , которая истинна тогда и только тогда, когда ровно одна из этих переменных истинна.
- Докажите, что всякую булеву функцию можно записать с помощью переменных, сложения, умножения и константы 1.
- Спектром* формулы  $A$  назовем множество  $\{n \in \mathbf{N} \mid A \text{ имеет модель мощности } n\}$ .
  - Постройте формулу в сигнатуре  $\{=\}$ , спектр которой есть  $\mathbf{N} \setminus \{1, 3\}$ .
  - Постройте формулу в сигнатуре  $\{=, f\}$  (где  $f$  — одноместный функциональный символ), спектр которой есть множество всех положительных четных чисел.