**Программа коллоквиума по курсу «Логика и алгоритмы»**
**1 модуль, 14.10.2013**

1. Понятие множества. Равенство множеств. Аксиомы объемности, пары. Булевы операции. Бесконечные объединения и пересечения множеств. Аксиома объединения. Примеры: открытые и замкнутые множества на прямой и плоскости; канторовское множество; его замкнутость и нигде не плотность.

2. Множество всех подмножеств данного множества и аксиома степени. Упорядоченные пары (по Куратовскому). Декартово произведение множеств. Отображения множеств, инъективность, сюръективность.

3. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности. Соответствие между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём. Фактормножество.

4. Равномощность множеств. Множество $Y^X$ всех функций $f : X \to Y$. Биекция между $\mathcal{P}(X)$ и $2^X$.

5. Натуральный ряд. Аксиома бесконечности и формальное определение множества натуральных чисел (по фон Нейману). Принцип математической индукции. Его вывод из определения натурального ряда. Принцип наименьшего числа и его вывод из принципа индукции.

6. Счётные множества. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Счётность $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}^*$ (множества всех конечных последовательностей натуральных чисел).

7. Равномощность множеств. Множество $Y^X$ всех функций $f : X \to Y$. Равномощность $\mathbb{R}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

8. Сравнение мощностей множеств. Теорема Кантора–Бернштейна.

9. Счётность множества (вещественных) алгебраических чисел. Несчётность $\mathbb{R}$, множество $\mathcal{P}(X)$ не равномощно $X$.

10. Частично упорядоченные множества. Терминология: строгий и нестрогий порядок, линейный порядок, максимальный элемент, наибольший элемент, верхняя грань множества, цепь в частично упорядоченном множестве. Диаграммы конечных множеств.

11. Операции суммы и произведения линейно упорядоченных множеств. Изоморфизм линейно упорядоченных множеств. Примеры: $\omega + \omega$, $\omega \times \omega$.

12. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку.

13. Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

14. Аксиома выбора. Лемма Цорна. Вывод леммы Цорна из аксиомы выбора.

15. Теорема Цермело (всякое множество может быть вполне упорядочено). Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Вывод аксиомы выбора из теоремы Цермело.