Логика и алгоритмы, 2013. Задание 2.

`http://www.mi.ras.ru/~bekl/logic2013.html`

Обязательные задачи

16. A^B означает множество всех функций из B в A. Докажите, что $(A^B)^C \sim A^{B\times C} \sim (A^C)^B$.

17. $B \lesssim C$ означает, что существует инъекция из B в C. Докажите, что если $B \lesssim C$, то $B^A \lesssim C^A$. Кроме того, если $A \neq \varnothing$, то и $A^B \lesssim A^C$.

18. (письменно) Докажите, что множество всех конечных подмножеств данного счётного множества счётно.

19. (a) Докажите, что если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathcal{P}(A \cup B) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
    (b) Выведите отсюда, что $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

20. (a) (письменно) Докажите, что $\mathcal{P}(A)^B \sim \mathcal{P}(A \times B) \sim \mathcal{P}(B)^A$.
    (b) Выведите отсюда, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Дополнительные задачи

21. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$ есть объединение счётного множества открытых кругов.

22. Докажите, что множество всех счётных подмножеств данного счётного множества имеет мощность континуума.

23. Докажите, что множество всех счётных подмножеств множества $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

24. Докажите, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

25. Докажите, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

26. Существует ли множество $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ мощности континуума такое, что для всех $A, B \in X$ либо $A \subset B$, либо $B \subset A$?

27. Докажите, что канторовское множество имеет мощность континуума.

28. Докажите, что множество всех открытых подмножеств $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

29. Дайте альтернативное доказательство теоремы Кантора–Бернштейна, не использующее индукцию: если $f : X \to X$ инъекция и $X \supset A \supset f(X)$, то $f(X) \sim A$.

   (a) Назовём множество $B \subset X$ *хорошим*, если $X \setminus A \subset B$ и $f(B) \subset B$. Докажите, что пересечение C всех хороших множеств — хорошее.
   (b) Докажите, что $C = (X \setminus A) \cup f(C)$.
   (c) Положим
   $$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in C \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$
   Докажите, что $g : X \to A$ есть биекция.

30. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ есть объединение не более, чем счётного множества попарно непересекающихся открытых интервалов (возможно, имеющих концы на бесконечности).