Логика и алгоритмы, 2013.

http://www.mi.ras.ru/∼bekl/logic2013.html

Задачи к семинару. Индукция.

216. Докажите, что число $111\dots111$ ($3n$ единиц) делится на $3n$ при любом n.

217. Числа Фибоначчи определяются формулами $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что $(\frac{3}{2})^n < F_n < 2^n$.

218. Докажите, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

219. Докажите, что при любом $n > 0$
$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

220. На доске написаны два числа 1, 1. Вписав между числами их сумму, мы получим числа 1, 2, 1. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа 1, 3, 2, 3, 1. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

221. Имеется по одной гире в 1, 3, 9, 27, 81, 243 граммов (каждая следующая втрое тяжелее предыдущей). Докажите, что с их помощью можно уравновесить любой груз до 700 г, весящий целое число граммов, если разрешается класть гири на обе чашки рычажных весов.

222. Найти общий член последовательности a_n, если $a_1 = 1$, $a_2 = \cos x$, $a_n = a_{n-1}\cos x + \cos(n-1)x$ при $n > 1$.

223. Даны n монет одинакового вида, из которых одна – фальшивая, по весу легче остальных. Докажите, что если $n \leqslant 3k$, то достаточно k взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы определить фальшивую монету.