Логика и алгоритмы, 2013.

http://www.mi.ras.ru/~bekl/logic2013.html

Задачи к семинару. Упорядоченные множества.

224. Постройте диаграмму частично упорядоченного множества $(\mathcal{P}(0,1,2), \subset)$.

225. Докажите, что $(P(X), \subset) \cong (P(X), \supset)$.

226. Рассмотрим множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ со стандартным отношением порядка. Постройте вложение упорядоченного множества $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$ (т.е. изоморфизм на частично упорядоченное подмножество).

227. Докажите, что линейно упорядоченные множества $\mathbb{Q} + 1$ и $\mathbb{Q}$ не изоморфны.

228. Докажите, что линейно упорядоченные множества $\mathbb{Q} + \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не изоморфны.

229. Докажите, что всякое счетное линейно упорядоченное множество можно вложить в $\mathbb{Q}$.

230. Докажите, что всякое частично упорядоченное множество $(X, <)$ можно вложить в $(P(X), \subset)$.

231. Докажите, что если вполне упорядоченное множество бесконечно и имеет наибольший элемент, то оно имеет начальный отрезок, изоморфный ω.

232. Рассмотрим множество M всех многочленов от переменной x степени не выше 3 с натуральными коэффициентами со следующим отношением $\prec$: $f \prec g$, если для всех достаточно больших $x \in \mathbb{N}$, $f(x) < g(x)$. Докажите, что $(M, \prec)$ - вполне упорядоченное множество. Какой у него порядковый тип?

233. Докажите, что существует континуум различных вполне упорядочений множества $\mathbb{N}$.

234. Докажите, что всякое вполне упорядоченное множество имеет единственный автоморфизм (т.е. изоморфизм на себя).

235. Опишите все автоморфизмы упорядоченного множества $(\mathbb{Z}, <)$.

236. Существует ли вполне упорядоченное множество X, для которого $X + \omega \cong X$?

237. Докажите, что для всякого вполне упорядоченного множества X найдется вполне упорядоченное множество Y, не изоморфное никакому начальному отрезку X.