Логика и алгоритмы, 2013.
http://www.mi.ras.ru/∼bekl/logic2013.html

Задачи к семинару. Вполне упорядоченные множества и аксиома выбора.

238. Верно ли, что для любых линейно упорядоченных множеств α, β, γ имеет место:
(a) $\alpha+(\beta+\gamma) \cong (\alpha+\beta)+\gamma$; (b) $\alpha+\beta \cong \beta+\alpha$; (c) $(\alpha+\beta)\gamma \cong \alpha\gamma+\beta\gamma$ (d) $\alpha(\beta+\gamma) \cong \alpha\beta+\alpha\gamma$?

239. (возведение в степень) Пусть $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех конечных последовательностей $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ элементов X таких, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n$, где n может быть произвольным.

Зададим на $\Omega(X)$ лексикографический порядок: $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ меньше $\langle y_1, y_2, \dots, y_m\rangle$, если для некоторого $k \leqslant \min(n, m)$ $\forall i < k\ x_i = y_i$ и $x_k < y_k$, или же $\forall i \leqslant n\ x_i = y_i$ и $n < m$.

(a) Доказать, что $\Omega(X)$ вполне упорядочено.
(b) Проверить, что $\Omega(1) \cong \omega$; $\Omega(X+1) \cong \Omega(X)\cdot\omega$; $\Omega(X+Y) \cong \Omega(X)\cdot\Omega(Y)$.

240. Выведите аксиому выбора непосредственно из леммы Цорна и из теоремы Цермело.

241. С помощью леммы Цорна докажите, что всякая цепь в частично упорядоченном множестве содержится в максимальной (по включению).

242. Докажите, что любой частичный порядок на множестве X можно продолжить до линейного. (Отношение R_2 *продолжает* R_1, если $R_1 \subset R_2$.)

243. Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовем *линейно независимым над* $\mathbb{Q}$, если для любых $e_1, \dots, e_n \in X$ и $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ равенство $r_1e_1 + \dots + r_ne_n = 0$ имеет место лишь в случае $r_1 = \dots = r_n = 0$.

(a) Докажите с помощью леммы Цорна, что существует максимальное линейно независимое над $\mathbb{Q}$ подмножество $\mathbb{R}$ (такое множество называется *базисом Гамеля*).
(b) Если $B \subset \mathbb{R}$ — базис Гамеля, то всякое $x \in \mathbb{R}$ единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых) представляется в виде
$$x = r_1e_1 + \dots + r_ne_n,$$
для некоторых $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ и $e_1, \dots, e_n \in B$.
(c) Докажите, что все базисы Гамеля имеют одинаковую мощность. Какую?

244. Выведите из предыдущей задачи:

(a) Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отличная от линейной и удовлетворяющая тождеству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли такая функция иметь предел в точке $x = 0$?

(b) Существует биекция между $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$, сохраняющая операцию сложения, то есть аддитивные группы $(\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ изоморфны. (Вместо $\mathbb{C}$ можно взять аддитивную группу n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$.)