

Логика и алгоритмы 2013. Задание 5.
Логика предикатов

Обязательные задачи (5 баллов)

Рассмотрим сигнатуру с равенством, двуместными функциональными символами $+$, \cdot и константами 0 , 1 . Пусть \mathbb{N} — её стандартная модель на множестве всех натуральных чисел. Определимые подмножества \mathbb{N} (а также n -местные отношения и операции на \mathbb{N}) называются *арифметическими*.

43. а) Пусть A, B — арифметические множества. Докажите, что множества $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ — арифметические.
б) Докажите, что если множество натуральных чисел образует арифметическую прогрессию, то оно — арифметическое.
44. (письменно) Приведите формулу к предварённой нормальной форме:

$$\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y).$$

45. Общезначимы ли следующие формулы? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.
- а) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$;
б) $\exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y, y)$.
46. Определимо ли подмножество \mathbb{Z} в модели $(\mathbb{Q}, <)$?

Дополнительные задачи

(Каждый пункт любой задачи оценивается в один балл.)

47. Докажите, что множество всех натуральных степеней числа 2 — арифметическое.
48. Докажите, что функция $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ (целая часть квадратного корня) — арифметическая.
49. Докажите, что следующие формулы истинны во всякой конечной модели, но не общезначимы:
- а) $\forall x \forall y \forall z (R(x, x) \wedge (R(x, z) \rightarrow (R(x, y) \vee R(y, z)))) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y)$;
б) $\exists x \forall y \exists z ((Q(y, z) \rightarrow Q(x, z)) \rightarrow (Q(x, x) \rightarrow Q(y, x)))$.
50. Выпишите формулу в сигнатуре $\{=, <\}$, все модели которой — двухэлементные линейные порядки.
51. Докажите, что в модели $(\mathbb{N}, \cdot, =)$ не определимы $<$ и $+$.
52. а) Найдите все определимые подмножества в модели $(\mathbb{R}, +, =)$.
б) Найдите все определимые одноточечные подмножества в $(\mathbb{R}, +, =, 1)$.