Логика и алгоритмы 2013. Задание 6.

Теории первого порядка.

Определение. $T \vdash A$ означает, что формула A выводима в теории T. $\vdash A$ означает, что A выводима в исчислении предикатов с равенством. $T \vdash S$ означает, что все формулы из S выводимы в T. $T \equiv S$ означает $T \vdash S$ и $S \vdash T$. Теория T называется *конечно аксиоматизируемой*, если $T \equiv S$ для некоторого конечного множества формул S. T называется *полной*, если T непротиворечива и для любой замкнутой формулы A в языке T имеет место $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

Обязательные задачи.

115. Выведите следующие правила в исчислении предикатов (см. стр. 2):

   (a) $T \vdash \forall x\, A(x)$, если и только если $T \vdash A(x)$;

   (b) (правило контрапозиции) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\neg B \to \neg A)$;

   (c) (письменно) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A \to \exists x\, B)$.

В решении всех следующих задач можно пользоваться теоремами о полноте и о компактности для логики предикатов.

116. (письменно) Множество $\mathrm{Th}(M)$ всех предложений истинных в модели M называется *элементарной теорией модели M*. Докажите: теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M для которой $T \equiv \mathrm{Th}(M)$.

117. Докажите, что $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot) \neq \mathrm{Th}(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

118. Если теория имеет сколь угодно большие (по мощности) конечные модели, то она имеет и некоторую бесконечную модель. Выведите отсюда, что не существует теории, моделями которой являются в точности (a) все конечные циклические группы, (b) все конечные поля.

Дополнительные задачи.

1. Всякая непротиворечивая теория T имеет полное расширение $S \vdash T$ той же сигнатуры. (Вспомним лемму Цорна.)

2. Если формула A выполнена на всех бесконечных группах, то A выполнена на всех конечных группах мощности больше некоторого $n \in \mathbb{N}$.

3. Докажите, что теория полей нулевой характеристики (a) неполна, (b) не является конечно аксиоматизируемой.

4. *Спектром* формулы A назовём множество $\{n \in \mathbb{N} \mid A$ имеет модель мощности n, $n > 0\}$.
   (a) Постройте формулу в сигнатуре с равенством, которая имеет спектр $\{2,3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$;
   (b) Докажите, что совокупность спектров всех формул (произвольной сигнатуры) замкнута относительно операций пересечения и объединения;
   (c) Существует ли формула, спектр которой есть множество всех чётных чисел?
   (d) Существует ли такая формула в сигнатуре только с символом равенства?
5. (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x\, A(x)$, где A — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \ldots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$. *Указание.* Рассуждайте от противного и воспользуйтесь теоремой о компактности.
6. Пусть $B = \exists x_1 \ldots \exists x_n\, A$ — формула в языке без функциональных символов и констант, где A бескванторна. Докажите, что если B выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

Справка: аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

Аксиомы:

A1. Примеры тавтологий логики высказываний;

A2. $\forall x A \to [t/x]A$, если переменные терма t не связываются кванторами при подстановке вместо свободных вхождений переменной x в A;

A3. $[t/x]A \to \exists x A$, при том же условии;

A4. $\forall x\, (A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$, если x не входит свободно в A;

A5. $\forall x\, (B \to A) \to (\exists x\, B \to A)$, при том же условии;

A6. Аксиомы равенства:
1. $x = x$;
2. $x = y \to y = x$;
3. $x = y \wedge y = z \to x = z$;
4. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n))$;
5. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.

Схему аксиом A1 мы понимаем следующим образом. Если $A(p_1, \ldots, p_n)$ — тавтология и $C_1, \ldots, C_n$ — любые формулы, то формула $A(C_1, \ldots, C_n)$ есть аксиома.

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Gen) $\dfrac{A}{\forall x A}$