

Логика и алгоритмы, 2014. Задание 2.
<http://www.mi.ras.ru/~bekl/logic2014.html>

Обязательные задачи

A^B означает множество всех функций из B в A .
 $B \lesssim C$ означает, что существует инъекция из B в C .

16. Докажите, что если $B \lesssim C$, то $B^A \lesssim C^A$. Кроме того, если $A \neq \emptyset$, то и $A^B \lesssim A^C$.
17. (a) (письменно) Докажите, что множество всех конечных подмножеств данного счётного множества счётно.
(b) Докажите, что множество всех счётных подмножеств данного счётного множества имеет мощность континуума.
18. (a) Докажите, что если $A \cap B = \emptyset$, то $\mathcal{P}(A \cup B) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
(b) Выведите отсюда, что $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
19. (a) (письменно) Докажите, что $\mathcal{P}(A)^B \sim \mathcal{P}(A \times B) \sim \mathcal{P}(B)^A$.
(b) Выведите отсюда, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Дополнительные задачи

20. Докажите, что $(A^B)^C \sim A^{B \times C} \sim (A^C)^B$.
21. Докажите, что всякое открытое подмножество в \mathbb{R}^2 есть объединение счётного множества открытых кругов.
22. Докажите, что множество всех счётных подмножеств множества \mathbb{R} имеет мощность континуума.
23. Докажите, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
24. Докажите, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.
25. Существует ли множество $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ мощности континуума такое, что для всех $A, B \in X$ либо $A \subset B$, либо $B \subset A$?
26. Докажите, что канторовское множество имеет мощность континуума.
27. Докажите, что множество всех открытых подмножеств \mathbb{R} имеет мощность континуума.

28. Дайте альтернативное доказательство теоремы Кантора–Бернштейна, не используя индукцию: если $f : X \rightarrow X$ инъекция и $X \supset A \supset f(X)$, то $f(X) \sim A$.

(a) Назовём множество $B \subset X$ *хорошим*, если $X \setminus A \subset B$ и $f(B) \subset B$. Докажите, что пересечение C всех хороших множеств — хорошее.

(b) Докажите, что $C = (X \setminus A) \cup f(C)$.

(c) Положим

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in C \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что $g : X \rightarrow A$ есть биекция.

29. Докажите, что всякое открытое подмножество в \mathbb{R} есть объединение не более, чем счётного множества попарно непересекающихся открытых интервалов (возможно, имеющих концы на бесконечности).