Логика и алгоритмы, 2014. Задание 3.

`http://www.mi.ras.ru/~bekl/logic2014.html`

Обязательные задачи (письменно, сдать преподавателям своей группы до 21.10)

Пусть $(X_1, <_1)$ и $(X_2, <_2)$ — линейно упорядоченные множества. *Произведением* $X_1 \times X_2$ называется множество $X_1 \times X_2$, наделённое следующим отношением порядка:

$$\langle x_1, x_2\rangle < \langle y_1, y_2\rangle \overset{\text{def}}{\iff} (x_1 <_1 x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 <_2 y_2)).$$

Если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то *суммой* $X_1 + X_2$ называется упорядоченное множество с носителем $X_1 \cup X_2$ и отношением порядка

$$x < y \overset{\text{def}}{\iff} (x, y \in X_1 \wedge x <_1 y) \vee (x, y \in X_2 \wedge x <_2 y) \vee (x \in X_1 \wedge y \in X_2).$$

Если $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то $X_1 + X_2$ определяем как сумму двух любых непересекающихся изоморфных копий упорядоченных множеств X_1 и X_2, например множеств $X_1 \times \{0\}$ и $X_2 \times \{1\}$.

30. Рассмотрим множества $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ со стандартным отношением порядка. Докажите, что: (a) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$; (b) $\mathbb{R} + \mathbb{R} \ncong \mathbb{R}$.

31. Докажите, что $X_1 \times X_2$ вполне упорядочено, если таковы множества X_1 и X_2.

32. Для частично упорядоченных множеств X докажите эквивалентность следующих утверждений:

    (a) Всякое непустое подмножество X имеет минимальный элемент;

    (b) Не существует бесконечной убывающей последовательности $x_0 > x_1 > \cdots$ элементов X.

    Где и как в Вашем рассуждении используется аксиома выбора?

33. Докажите эквивалентность аксиоме выбора следующего утверждения: *для любой сюръекции $f : A \to B$ найдется отображение $g : B \to A$ такое, что $f \circ g = id_B$.*