

Задание 4: теория алгоритмов

В задачах 3-15 можно использовать тезис Черча.

Обязательные задачи

1. (письменная) Докажите разрешимость множества $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$, построив явно машину Тьюринга. Сначала опишите порядок действий этой машины на русском языке.
2. (письменная) Постройте машину Тьюринга, вычисляющую остаток от деления натурального числа на 3. Сначала опишите порядок действий этой машины на русском языке.
3. (a) Докажите, что декартово произведение двух перечислимых подмножеств \mathbb{N} перечислимо.
(b) Докажите, что декартово произведение двух разрешимых подмножеств \mathbb{N} разрешимо.
4. (a) Докажите, что график любой вычислимой функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является перечислимым подмножеством \mathbb{N}^2 .
(b) Докажите, что если график функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является перечислимым подмножеством \mathbb{N}^2 , то f вычислима.
5. Пусть Δ — конечный алфавит, $A \subset \mathbb{N}$ — разрешимое множество. Докажите, что множество слов $\{x \in \Delta^* \mid (\text{длина } x) \in A\}$ разрешимо.
6. Постройте разрешимое множество $B \subset \mathbb{N}^2$, для которого проекция $\text{pr}_1 B = \{x \mid \exists y (x,y) \in B\}$ — неразрешимое множество.

Дополнительные задачи

7. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — вычислимая биекция. Докажите, что обратная биекция вычислима.
8. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — вычислимая строго возрастающая функция, A — разрешимое множество натуральных чисел. Докажите, что множество $f(A)$ разрешимо.
9. Докажите, что график любой вычислимой строго возрастающей функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является разрешимым подмножеством \mathbb{N}^2 .
10. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — бесконечное перечислимое множество. Докажите, что существует вычислимая инъекция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что $\text{rng } f = A$.
11. Докажите, что если $A, B \subset \mathbb{N}$ — бесконечные разрешимые множества с бесконечными дополнениями, то существует вычислимая биекция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, переводящая A в B .
12. Пусть φ_n — вычислимая функция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ с номером n . Докажите, что множество $\{n \mid \varphi_n \text{ тотальна}\}$ не перечислимо. (Указание: рассмотрите вычислимый пересчет этого множества и воспользуйтесь диагонализацией).

13. (a) Докажите, что для любых двух множеств $A, B \subset \mathbf{N}$ найдется наименьшее $C \subset \mathbf{N}$, к которому они оба m -сводимы, т. е. $A \leq_m C, B \leq_m C$ и

$$\forall C' (C' \subset \mathbf{N} \ \& \ A \leq_m C' \ \& \ B \leq_m C' \Rightarrow C \leq_m C').$$

(b) Докажите, что если $A \subset \mathbf{N}$ перечислимо, то $A \leq_m K$, где

$$K = \{x \in \mathbf{N} \mid \varphi_x(x) \text{ определена}\}.$$

14. Докажите, что множество $\{n \mid \varphi_n(0) \text{ не определена}\}$ не перечислимо.

15. Докажите, что множество $\{n \mid \text{dom } \varphi_n = \emptyset\}$ не перечислимо.