Майнор «Логика»
НИУ ВШЭ, осень 2018 г.

Л.Д. Беклемишев

1 Логика высказываний

1.1 Алфавит, буква, слово

Определение 1.1 *Алфавитом* будем называть любое непустое множество. Его элементы называются *символами* (*буквами*).

Определение 1.2 *Словом* в алфавите Σ называется конечная последовательность элементов Σ.

Пример 1.3 Рассмотрим алфавит $\Sigma = \{a, b, c\}$. Тогда $baaa$ является словом в алфавите Σ.

Определение 1.4 Слово, не содержащее ни одного символа (то есть последовательность длины 0), называется *пустым словом* и обозначается ε.

Определение 1.5 *Длина* слова w, обозначаемая $|w|$, есть число символов в w, причём каждый символ считается столько раз, сколько раз он встречается в w.

Определение 1.6 Если x и y — слова в алфавите Σ, то слово xy (результат приписывания слова y в конец слова x) называется *конкатенацией* слов x и y.

Определение 1.7 Если x — слово и $n \in \mathbb{N}$, то через x^n обозначается слово

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ раз}}.$$

Положим $x^0 \rightleftharpoons \varepsilon$ (знак $\rightleftharpoons$ читается «равно по определению»).

Пример 1.8 По принятым соглашениям $ba^3 = baaa$ и $(ba)^3 = bababa$.

Определение 1.9 Множество всех слов в алфавите Σ обозначается Σ^*.

Определение 1.10 Подмножества множества Σ^* для некоторого алфавита Σ называются *словарными множествами*. В лингвистике и информатике словарные множества также часто называют *языками*.

Утверждение 1.11 *Если алфавит Σ конечен или счётен, то множество Σ^* счётно.*

В самом деле, для любого конечного подмножества $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ множество всех слов фиксированной длины в алфавите Σ_0 конечно. Следовательно, Σ_0^* является объединением счётного числа конечных множеств, а значит, таково и множество $\Sigma^* = \bigcup_{\Sigma_0 \subseteq \Sigma} \Sigma_0^*$.

1.2 Высказывания и логические операции

Логика высказываний формализует определённые представления о (реальных) высказываниях и логических операциях.

Определение 1.12 *Высказыванием* называется повествовательное предложение, для которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности.

Пример 1.13 Предложение «Лиссабон — столица Испании» является высказыванием.

Определение 1.14 Существуют два *истинностных значения* — «истина» и «ложь». Мы будем обозначать их И и Л, соответственно; считаем 1 и 0 синонимами И и Л.

Некоторые сложные высказывания строятся из более простых с помощью *логических операций*, таких как отрицание «не», конъюнкция «и», дизъюнкция «или», импликация «если …, то …».

Определение 1.15 *Логическая операция* — это такой способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором истинностное значение сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний.

Пример 1.16 Отрицание является логической операцией. Предложение «Неверно, что Лиссабон — столица Испании» построено из высказывания «Лиссабон — столица Испании» с помощью отрицания.

Замечание 1.17 Употребляемую в естественном языке импликацию «если A, то B» нельзя в полной мере считать логической операцией, поскольку она, среди прочего, указывает и на причинно-следственную связь между высказываниями A и B, то есть не выражается только лишь через истинностные значения высказываний A и B. Более того, высказывание «если A, то B» *полисемично*, то есть может пониматься по-разному в разных контекстах.

В математическом языке используется *материальная импликация*, которая является логической связкой. При этом высказывание «если A, то B» считается ложным в том и *только том* случае, если A истинно и B ложно.

1.3 Синтаксис логики высказываний

1.3.1 Переменные и связки

Пусть задан некоторый алфавит Var символов, называемых *пропозициональными*[1] *переменными*. Пропозициональные переменные будем обозначать буквами P, Q и т. д. (возможно, с индексами). Интуитивно, пропозициональные переменные интерпретируются как высказывания.

Знаки $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ (и аналогичные знаки, которые будут введены позже) называются *пропозициональными связками* или *булевыми связками*. Интуитивно, связки интерпретируются как логические операции (соответственно, как отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация).

1.3.2 Формулы

Формулы логики высказываний являются словами в алфавите, состоящем из пропозициональных переменных, пропозициональных связок и скобок: (и). Множество всех формул индуктивно определяется следующим образом.

Определение 1.18 *Множество формул* Fm логики высказываний порождается из множества Var по следующим правилам:

1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.

[1] Propositio (лат.) = предложение.

2. Если A — формула, то $\neg A$ — формула.

3. Если A и B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Другими словами, множество формул есть наименьшее множество, замкнутое относительно этих трёх правил.

Определение 1.19 *Построением* формулы A называем последовательность формул, каждый элемент которой есть либо переменная, либо получается из предыдущих по правилам 2 или 3, и последний элемент которой есть A.

Смысл определения 1.18 состоит в том, что формулами считаются те и только те слова, которые имеют построение. Определение множества объектов как наименьшего множества, замкнутого относительно некоторых правил образования, называется *индуктивным.* Такого рода определения часто используются в алгебре и логике.

Пример 1.20 Последовательность $P,\ Q,\ (P \to Q),\ (Q \wedge (P \to Q))$ есть построение формулы $(Q \wedge (P \to Q))$.

Формулы логики высказываний будем обозначать буквами A, B и т. д. (возможно, с индексами).

Определение 1.21 *Подформулами* формулы A называются все те формулы, которые входят в любое построение A. Подформула формулы A, отличная от самой формулы A, называется *собственной подформулой* формулы A.

Замечание 1.22 Не следует путать подформулы с их *вхождениями* в формулу. Одна и та же подформула может иметь несколько вхождений, например подформула P входит три раза в формулу $(P \to (P \wedge P))$.

Предложение 1.23 (однозначность разбора, без доказательства)

Каждая пропозициональная формула, не являющаяся переменной, может быть представлена единственным образом как $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ *или* $(A \to B)$.

Доказательство этого утверждения основывается на соображениях баланса скобок в формуле. Следствием является, например, тот факт, что множество подформул данной формулы не зависит от её построения и совпадает с множеством всех подслов данной формулы, являющихся формулами.

1.3.3 Сокращённая запись формул

Для удобства записи формул принято использовать некоторые сокращения. С формальной точки зрения, такие сокращения являются приёмами изложения, а не элементами языка логики высказываний. Мы рассмотрим два важных вида сокращений.

А. *Соглашения о скобках.*

Во-первых, можно опустить внешнюю пару скобок. Например, запись $P \to (Q \to P)$ обозначает формулу $(P \to (Q \to P))$.

Во-вторых, если в сокращённой записи рядом находятся две операции $\wedge$, то при отсутствии скобок внутренней считается та, которая находится левее. Другими словами, связка $\wedge$ считается *левоассоциативной*. Например, $P \wedge Q \wedge R$ и $(P \wedge Q) \wedge R$ обозначают одну и ту же формулу (длина этой формулы — 9 символов). Однако в записи $P \wedge (Q \wedge R)$ ни одной скобки опустить нельзя. Связка $\vee$ тоже является левоассоциативной, но связка $\to$ не является ни левоассоциативной, ни правоассоциативной (в этом курсе).

В-третьих, если в сокращённой записи рядом находятся разные связки, то при отсутствии скобок внутренней считается та, которая имеет более высокий приоритет согласно следующему списку, составленному в порядке убывания приоритетов: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$. Иными словами, связки с более высоким приоритетом связывают сильнее.

Разрешается также добавить внешнюю пару скобок. Например, запись $(\neg P)$ обозначает формулу $\neg P$. Добавление скобок пригодится, например, в определении 1.44.

Б. *Введение новых логических связок.*

Логическую связку *эквивалентности* $\leftrightarrow$ часто определяют как сокращение. При этом для любых формул A, B запись $A \leftrightarrow B$ понимается как обозначение для формулы $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Аналогичным образом можно ввести и другие логические связки, в частности:

$$
\begin{aligned}
\bot &\rightleftharpoons (P_0 \wedge \neg P_0), \quad \text{где } P_0 \text{ — фиксированная переменная;}\\
\top &\rightleftharpoons \neg\bot;\\
\bigwedge_{i=1}^{n} A_i &\rightleftharpoons (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n);\\
\bigvee_{i=1}^{n} A_i &\rightleftharpoons (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n).
\end{aligned}
$$

1.3.4 Другие варианты синтаксиса

Помимо стандартного, изложенного выше, способа записи формул логики высказываний существуют и другие варианты. Отметим три важных способа представления формул.

А. *Польская запись.* Логические связки (как унарные, так и бинарные) записываются префиксным образом, например, вместо $(A \wedge B)$ пишем $\wedge AB$; при этом скобки не употребляются. Так, формула $(A \to (B \wedge C))$ может быть записана «по-польски» как $\to A \wedge BC$. (Почему для польской записи имеет место теорема об однозначности разбора?)

Б. *Представление формул деревьями.* С каждой формулой можно однозначно связать бинарное дерево, называемое иногда *деревом разбора*, листья которого помечены пропозициональными переменными, а внутренние вершины – связками. Вершины этого дерева находятся во взаимно-однозначном соответствии со вхождениями подформул в данную формулу (соответетвующей корню дерева).

Интересно отметить, что одна из первых формулировок логики высказваний, данная в XIX веке немецким учёным Г. Фреге, использовала вариант графического изображения деревьев в качестве записи формул. (Напрашивается сравнение с иероглифическим письмом.)

В. *Представление формул ориентированными ациклическими графами.* Если отождествить в дереве разбора формулы вершины, соответствующие вхождениям одной и той же подформулы, то получится структура, называемая ориентированным ациклическим графом (DAG). При таком представлении вершины графа соответствуют подформулам данной формулы, а стрелки соединяют каждые две подформулы, одна из которых является максимальной собственной подформулой другой. Этот способ представления формул является наиболее экономным и распостранённым вариантом представления формул в памяти компьютера.

1.4 Таблицы истинности

Определение 1.24 Обозначим $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{\text{И}, \text{Л}\} \rightleftharpoons \{0, 1\}$. Функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ называются *булевыми функциями.*

Определение 1.25 *Оценкой пропозициональных переменных* (или просто *оценкой*) называется произвольная функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.

Определение 1.26 *Истинностное значение* (или просто *значение*) формулы при данной оценке f определяется индукцией по построению формулы в соответствии со следующими таблицами.

A	$\neg A$
Л	И
И	Л

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
Л	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л
И	И	И	И	И

С формальной точки зрения, оценка $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ продолжается до функции $f : \mathrm{Fm} \to \mathbb{B}$, определённой на множестве всех формул, по следующим правилам.

$$\begin{aligned} f(\neg A) = \text{И} &\iff f(A) = \text{Л}; \\ f(A \wedge B) = \text{И} &\iff f(A) = \text{И и } f(B) = \text{И}; \\ f(A \vee B) = \text{И} &\iff f(A) = \text{И или } f(B) = \text{И}; \\ f(A \to B) = \text{И} &\iff f(A) = \text{Л или } f(B) = \text{И}. \end{aligned}$$

Если $f(A) = \text{И}$, то говорят, что формула A *истинна* при оценке f. Иначе формула A *ложна* при данной оценке.

Специально рассмотрим случай, когда число переменных конечно, то есть $\mathrm{Var} = \{P_1, \dots, P_n\}$. Оценка f определяется набором своих истинностных значений на переменных $P_1, \dots, P_n$. Данному набору $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ сопоставим оценку $f_{\vec{x}}$, определяемую таблицей

P_1	P_2	$\dots$	P_n
x_1	x_2	$\dots$	x_n

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между оценками и наборами из $\mathbb{B}^n$.

Определение 1.27 *Таблицей истинности* (или *истинностной таблицей*) формулы A над переменными $P_1, \dots, P_n$ называется таблица, указывающая значения формулы A при всех возможных оценках переменных $P_1, \dots, P_n$. (Существует 2^n таких оценок, каждая из них записывается в отдельной строке. Обычно оценки $f_{\vec{x}}$ упорядочены в соответствии с лексикографическим порядком на наборах $\vec{x}$.)

Пример 1.28

P_1	P_2	$P_1 \leftrightarrow P_2$
Л	Л	И
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

Таким образом, таблица истинности формулы A над n переменными задаёт булеву функцию $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Функция φ_A определяется равенством

$$\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A),$$

верным для всех наборов $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.

1.5 Функциональная полнота

Всякую ли булеву функцию можно задать некоторой формулой? Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 1.29 (о функциональной полноте) *Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ найдётся такая формула A от n переменных, что $\varphi = \varphi_A$. При этом можно считать, что A содержит лишь связки $\neg$ и $\vee$.*

Эта теорема показывает, что известных нам логических операций $\vee$, $\neg$ в принципе достаточно, чтобы определить все возможные логические операции.

Доказательство. Равенство $\varphi = \varphi_A$ означает, что для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A).$$

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И}; \\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для произвольного $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}.$$

Легко видеть, что формула $A_{\vec{x}}$ истинна лишь при оценке $f_{\vec{x}}$. Другими словами, для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = \text{И} \iff f = f_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Для данной функции φ пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все наборы $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = \text{И}$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = \text{И} \iff \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j. \tag{2}$$

Положим теперь

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j},$$

тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = \text{И} &\iff \exists j \ f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = \text{И} \\ &\iff \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по (1)} \\ &\iff \varphi(\vec{x}) = \text{И} \quad \text{по (2)}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание, поскольку формула $A \wedge B$ равносильна $\neg(\neg A \vee \neg B)$ (см. ниже раздел 1.7). Поэтому, формулы $A_{\vec{x}}$ могут быть переписаны без использования знака $\wedge$. $\dashv$

1.6 Выполнимые формулы, тавтологии, логическое следование

1.6.1 Выполнимые формулы и тавтологии

Определение 1.30 Пропозициональная формула, истинная хотя бы при одной оценке пропозициональных переменных, называется *выполнимой*. Множество формул Γ назывется *выполнимым*, если существует оценка f, при которой истинны одновременно все формулы из Γ.

Определение 1.31 Пропозициональная формула, истинная при каждой оценке пропозициональных переменных, называется *тавтологией* (*тождественно истинной*).

Важность понятия тавтологии с точки зрения оснований математики (и логики в целом) состоит в том, что они выражают *универсальные законы* логики, верные независимо от содержания составляющих их высказываний. Запись $\models A$ выражает тот факт, что A — тавтология.

Определение 1.32 Пропозициональная формула, ложная при каждой оценке пропозициональных переменных, называется *тождественно ложной*.

Предложение 1.33 *Следующие условия равносильны.*

(i) *Формула A тождественно ложна.*

(ii) *Формула A не является выполнимой.*

(iii) *Формула* $\neg A$ — *тавтология.*

Доказательство. Предложение непосредственно следует из определений. $\dashv$

1.6.2 Проверка формулы на выполнимость

В приложениях часто встречается задача проверки пропозициональной формулы на выполнимость. Наиболее прямолинейный алгоритм её решения состоит в построении всей таблицы истинности формулы, то есть перебора 2^n всех возможных оценок. Этот алгоритм работает экспоненциальное число шагов от числа переменных исходной формулы. Существуют более изощрённые и несколько более эффективные алгоритмы решения этой задачи, однако все они имеют экспоненциальную нижнюю оценку сложности.

Важной открытой проблемой является вопрос о существовании полиномиального по числу шагов алгоритма решения этой задачи. Поскольку выполнимость пропозициональной формулы является классическим примером так называемой NP-полной задачи, этот вопрос эквивалентен знаменитой проблеме P=NP? — одной из самых важных открытых математических проблем. В настоящее время доминирует гипотеза о том, что такого полиномиального алгоритма не существует.

1.6.3 Логическое следование

Определение 1.34 Пусть Γ — некоторое множество формул логики высказываний и A — формула логики высказываний. Говорят, что формула A *логически следует* (или *семантически следует*) из множества Γ (обозначение $\Gamma \models A$), если формула A истинна при каждой оценке пропозициональных переменных, при которой истинны все формулы из Γ.

Пример 1.35 $\{P \vee Q, R, \neg Q\} \models P \wedge R$.

Предложение 1.36 $\{B_1, \dots, B_n\} \models A$ *тогда и только тогда, когда формула* $(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \to A$ *является тавтологией. В частности, формула* A *— тавтология, если и только если* A *логически следует из пустого множества формул.*

1.7 Равносильные формулы в логике высказываний

Определение 1.37 Формулы A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), обозначение $A \equiv B$, если при каждой оценке пропозициональных переменных значение A совпадает со значением B. Другими словами, если $\varphi_A = \varphi_B$.

Пример 1.38 $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$; $P \to Q \not\equiv \neg P \to \neg Q$.

Непосредственно из определений вытекают следующие факты.

Утверждение 1.39 (i) *Отношение $\equiv$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

(ii) *Формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда формула $A \leftrightarrow B$ является тавтологией.*

(iii) *Формула A — тавтология тогда и только тогда, когда $A \equiv \top$.*

Основные равносильности:

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Упражнение 1.40 Равносильны ли формулы $P \to (Q \to R)$ и $(P \to Q) \to R$? Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку g, что $g(P) = g(Q) = g(R) =$ Л.

Упражнение 1.41 Равносильны ли формулы $P \to (Q \to R)$ и $(P \wedge Q) \to R$? Ответ: Да.

Замечание 1.42 В задаче на упрощение формулы необходимо найти равносильную, но более короткую формулу. При этом длина понимается как общее количество всех вхождений символов в формулу.

Упражнение 1.43 *Упростить формулы:*

(i) $(P \leftrightarrow Q) \to P$. *Ответ:* $P \vee Q$.

(ii) $\neg P \to \neg Q$. *Ответ:* $Q \to P$.

(iii) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R \vee \neg P)$. *Ответ:* $(P \vee (Q \wedge R)) \wedge (Q \vee R)$.

1.8 Правила подстановки и замены подформулы на эквивалентную

Для доказательства равносильности формул, помимо основных равносильностей, перечисленных в таблице, и правил, соответствующих рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения $\equiv$, мы пользуемся правилами подстановки и замены на подформулы на эквивалентную.

Определение 1.44 Если C и D — формулы, а P — пропозициональная переменная, то через $C[P/D]$ обозначим результат подстановки формулы D вместо P в формулу C.

Формальное определение даётся с помощью индукции по построению формулы C.

$$\begin{array}{l} P[P/D] \rightleftharpoons D, \\ Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \text{ — переменная, отличная от } P, \\ (\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]), \\ (A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]), \\ (A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]), \\ (A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]). \end{array}$$

Пример 1.45 Пусть $C = (P_1 \to P_2) \to P_2$ и $D = P_3 \to P_2$. Тогда

$$C[P_2/D] = (P_1 \to (P_3 \to P_2)) \to (P_3 \to P_2).$$

Теорема 1.46 (о подстановке) *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а P — пропозициональная переменная, то $A[P/B]$ — тавтология.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную оценку g. Обозначим через g' оценку, полученную из g присвоением переменной P значения $g(B)$. Индукцией по построению C можно доказать, что $g(C[P/B]) = g'(C)$ для любой формулы C. Положим $C = A$. Так как формула A истинна при оценке g', то формула $A[P/B]$ истинна при оценке g. $\dashv$

Пример 1.47 Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ является тавтологией.

Теорема 1.48 *Пусть A, B, C — формулы, а P — пропозициональная переменная. Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Доказательство. Пусть $A \equiv B$. В силу 1.39 $A \leftrightarrow B$ — тавтология. По теореме 1.46 $(A \leftrightarrow B)[P/C]$ — тавтология. Из определений следует, что $(A \leftrightarrow B)[P/C]$ совпадает с $A[P/C] \leftrightarrow B[P/C]$. В силу 1.39 $A[P/C] \equiv B[P/C]$. $\dashv$

Пример 1.49 Пусть $A = (P_1 \to P_2) \to P_2$, $B = P_1 \vee P_2$, $C = P_3 \to P_2$. Так как $(P_1 \to P_2) \to P_2 \equiv P_1 \vee P_2$, то $(P_1 \to (P_3 \to P_2)) \to (P_3 \to P_2) \equiv P_1 \vee (P_3 \to P_2)$.

Лемма 1.50 *Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$. Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2$, $A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2$, $A_1 \to A_2 \equiv B_1 \to B_2$.*

Теорема 1.51 (о замене подформулы на эквивалентную) *Пусть A, B, C — формулы, а P — пропозициональная переменная. Если $A \equiv B$, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по построению формулы C. $\dashv$

Пример 1.52 Пусть $A = Q \vee Q$, $B = Q$, $C = P \wedge R$. Так как $Q \vee Q \equiv Q$, то $(Q \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$.

Пример 1.53 Существуют ли такие выполнимые формулы A и B, что формула $A[P_1/B]$ не является выполнимой? Ответ: Да. Например, $A = \neg P_1$, $B = P_2 \vee \neg P_2$.

1.9 Нормальные формы

1.9.1 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Определение 1.54 *Литералами* называются переменные и их отрицания.

Пример 1.55 Формулы P_3 и $\neg P_1$ являются литералами, а формулы $P_3 \vee P_1$ и $\neg\neg P_3$ — не являются.

Определение 1.56 *Элементарной конъюнкцией* называем формулу вида $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

Пример 1.57 Формула $(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$ является элементарной конъюнкцией, а формула $P \wedge (\neg Q \wedge \neg P)$ не является элементарной конъюнкцией.

Определение 1.58 *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называем формулу вида $\bigvee_{j=1}^{m} C_j$, где C_j — элементарные конъюнкции.

Пример 1.59 Формулы $(P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R)$ и $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P \vee \neg R$ являются дизъюнктивными нормальными формами.

Упражнение 1.60 *Привести к дизъюнктивной нормальной форме формулу* $(P \vee Q) \to R$. *Ответ:* $(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$.

Аналогично определяются элементарные дизъюнкции и конъюнктивные нормальные формы.

Определение 1.61 *Элементарной дизъюнкцией* называем формулу вида $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называем формулу вида $\bigwedge_{j=1}^{m} D_j$, где D_j — элементарные дизъюнкции.

Упражнение 1.62 *Привести к конъюнктивной нормальной форме формулу* $(P \vee Q) \to R$. *Ответ:* $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$.

Теорема 1.63 *Каждая пропозициональная формула равносильна некоторой дизъюнктивной нормальной форме и некоторой конъюнктивной нормальной форме.*

Доказательство (первый вариант). Если A тождественно ложна, в качестве её ДНФ можно взять формулу $P \wedge \neg P$, где P — любая переменная. В противном случае достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте для функции φ_A есть ДНФ.

Доказательство (второй вариант). Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$. Далее преобразуем формулу, применяя таблицу основных эквивалентностей и активно пользуясь правилом замены подформулы на эквивалентную. Сначала проносим все отрицания максимально вглубь формулы и удаляем многократные отрицания. Затем, пользуясь дистрибутивностью, выносим все дизъюнкции максимально наружу. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Осталось заметить, что если A — дизъюнктивная нормальная форма, то формула $\neg A$ превращается в конъюнктивную нормальную форму после переноса всех отрицаний вглубь и удаления двойных отрицаний. Значит, для того чтобы получить конъюнктивную нормальную форму формулы A, достаточно применить этот процесс к дизъюнктивной нормальной форме формулы $\neg A$. $\dashv$

1.9.2 Совершенные ДНФ и КНФ

В этом параграфе считаем фиксированным конечный набор переменных $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ и будем рассматривать лишь формулы от этих переменных.

Определение 1.64 Формула A называется *совершенной ДНФ*, если A — ДНФ и

- Каждая элементарная конъюнкция имеет вид $A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.
- $A = \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}$, где $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in \mathbb{B}^n$ попано различны и взяты в лексикографическом порядке.

Определение *совершенной КНФ* аналогично, с заменой дизъюнкций на конъюнкции и наоборот.

Замечание 1.65 Удобно расширить множество формул константами $\bot$ (ложь) и $\top$ (истина). Тем самым, формулами считаются и все выражения, построенные с помощью булевых связок из переменных и этих констант. Считаем $\bot$ совершенной ДНФ, а $\top$ — совершенной КНФ.

Замечание 1.66 Совершенные ДНФ и КНФ перестают быть совершенными, если рассматривать их как формулы от более широкого набора переменных. Поэтому имеет смысл говорить о совершенных ДНФ и КНФ лишь относительно некоторого фиксированного набора переменных.

Теорема 1.67 *Всякая формула A равносильна некоторой совершенной ДНФ.*

Доказательство (первый вариант). Если A тождественно ложна, в качестве её ДНФ можно взять $\bot$. В противном случае достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте для функции φ_A есть совершенная ДНФ. $\dashv$

Доказательство (второй вариант). Сначала приведём формулу к ДНФ. Удалим противоречивые конъюнкции, воспользовавшись равносильностями:

$$A \wedge \neg A \equiv \bot, \quad \bot \wedge A \equiv \bot, \quad \bot \vee A \equiv A.$$

При этом формула либо приводится к виду $\bot$, либо в формуле останутся лишь элементарные конъюнкции без вхождений пар противоположных литералов. В оставшихся конъюнкциях удалим повторы литералов с помощью равносильности $A \wedge A \equiv A$. Для каждой конъюнкции добавим недостающие до полного набора $P_1, \ldots, P_n$ переменные, пользуясь равносильностью

$$A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

С помощью ассоциативности и коммутативности добьёмся требуемого упорядочения всех членов и правильной расстановки скобок. $\dashv$

Замечание 1.68 $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv A \wedge (B \vee \neg B) \equiv A \wedge \top \equiv A$.

Теорема 1.69 *Совершенные ДНФ эквивалентных формул (графически) совпадают.*

Доказательство. . Для совершенной ДНФ каждая элементарная конъюнкция определяет некоторую выполняющую оценку, а сама ДНФ — множество всех таких оценок. $\dashv$

Следствие 1.70 *Совершенная ДНФ любой формулы A единственна.*

Аналогичные теоремы имеют место и для совершенных КНФ.

Упражнение 1.71 *Привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме формулу $\neg(P \leftrightarrow Q)$. Ответ: $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$.*

1.9.3 Полнота исчисления эквивалентностей[2]

Следующая теорема является простым аналогом теоремы о полноте исчисления высказываний, доказываемой ниже. Смысл этого результата в том, что мы сводим (без потери информации) проверку эквивалентности формул к чисто механическим символьным преобразованиям. Исчисление эквивалентностей, фигурирующее неявно в данной теореме — представитель класса так называемых *эквациональных исчислений*, или *исчислений тождеств*, которые распространены в алгебре.

Теорема 1.72 *Всякая равносильность $A \equiv B$ может быть выведена из основных равносильностей (данных в таблице) и дополнительных равносильнольностей для констант $\top$ и $\bot$*

$$A \wedge \neg A \equiv \bot, \quad A \vee \neg A \equiv \top$$

[2]Необязательный материал.

по правилу замены подформулы на эквивалентную и правилам

$$\frac{B \equiv A}{A \equiv B}, \quad \frac{A \equiv B \quad B \equiv C}{A \equiv C}.$$

Доказательство. По теореме о СДНФ равносильные формулы приводятся к графически равным СДНФ. При этом достаточно пользоваться лишь основными и дополнительными равносильностями и указанными правилами для вывода новых равносильностей (см. второй способ доказательства теоремы о СДНФ). Нам нужно лишь вывести следующие используемые в доказательстве теоремы о СДНФ равносильности для констант: $\bot \wedge A \equiv \bot$, $\bot \vee A \equiv A$, $A \wedge \top \equiv A$. Получаем:

- $A \wedge \bot \equiv A \wedge (A \wedge \neg A) \equiv (A \wedge A) \wedge \neg A \equiv A \wedge \neg A \equiv \bot$.
- $A \vee \bot \equiv A \vee (A \wedge \neg A) \equiv A$ по закону поглощения.
- $A \wedge \top \equiv A \wedge (A \vee \neg A) \equiv A$, аналогично.

Таким образом, от A к B можно перейти по цепочке эквивалентностей

$$A = A_0 \equiv A_1 \equiv \cdots \equiv A' = B' \equiv \cdots \equiv B_1 \equiv B_0 = B,$$

где A' и B' — СДНФ формул A и B, соответственно, а каждый переход $A_i \equiv A_{i+1}$ и $B_{i+1} \equiv B_i$ получается заменой некоторой подформулы на эквивалентную в соответствии с одной из известных нам основных или дополнительных эквивалентностей. $\dashv$

1.10 Другие варианты формальной семантики

1.10.1 Теоретико-множественная семантика

Пусть U — непустое множество; $\mathcal{P}(U)$ — множество всех его подмножеств.

Определение 1.73 *Оценкой* называется функция $f : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(U)$. *Значение* $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется индуктивно по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Замечание 1.74 Если взять $U = \{0\}$, теоретико-множественная семантика сводится к стандартной двузначной: Л $= \varnothing$, И $= U$.

Замечание 1.75 Если взять $U = \mathbb{R}^2$ и если для $P \in \mathrm{Var}$ $f(P)$ — круги на плоскости, получаем *диаграммы Венна*, известные из школы.

1.10.2 Алгебраическая семантика[3]

Определение 1.76 Множество $\mathbf{B}$ с заданными на нём константами 0, 1 и операциями $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, которые удовлетворяют равенствам

$$a \wedge \neg a = 0, \quad a \vee \neg a = 1$$

и равенствам, соответствующим таблице основных эквивалентностей, называется *булевой алгеброй.*

В таблице основных эквивалентностей заменяем $\equiv$ на $=$ и большие латинские буквы A, B, C (означающие произвольные формулы) на маленькие a, b, c (означающие элементы множества $\mathbf{B}$), получаем список *тождеств булевой алгебры:*

$a \wedge b$	$=$	$b \wedge a$	$a \vee b$	$=$	$b \vee a$
$a \wedge (b \wedge c)$	$=$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c)$	$=$	$(a \vee b) \vee c$
$a \wedge a$	$=$	a	$a \vee a$	$=$	a
$a \wedge (b \vee c)$	$=$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c)$	$=$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee (a \wedge b)$	$=$	a	$a \wedge (a \vee b)$	$=$	a
$\neg(a \wedge b)$	$=$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b)$	$=$	$\neg a \wedge \neg b$
$\neg\neg a$	$=$	a	$a \to b$	$=$	$\neg a \vee b$
$a \wedge \neg a$	$=$	0	$a \vee \neg a$	$=$	1

Примеры булевых алгебр.

- $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{0, 1\}$;
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U;
- $\mathrm{Fm}/{\equiv}$ (*алгебра Линденбаума*), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$. Более формально, если $[A]$ обозначает класс эквивалентности формулы A, то операция $\wedge$ на классах определяется следующим образом: $[A] \wedge [B] \rightleftharpoons [A \wedge B]$, и аналогично определены остальные операции. Лемма 1.50 гарантирует корректность этих определений.

[3]Необязательный материал.

Определение 1.77 *Оценкой* на булевой алгебре называется функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbf{B}$. *Значение* $f(A) \in \mathbf{B}$ формулы A при оценке f вычисляется в соответствии с заданными на $\mathbf{B}$ операциями, в частности $f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$ и т.д.

Непосредственно следует из определений следует

Лемма 1.78 *Для любой оценки $f : \mathrm{Var} \to \boldsymbol{B}$ на булевой алгебре, если $A \equiv B$ — одна из основных или дополнительных эквивалентностей, то $f(A) = f(B)$ в $\boldsymbol{B}$.*

Следующая теорема показывает, что каждая из указанных семантик задаёт одно и то же множество тавтологий.

Теорема 1.79 *Для любого множества U и любой булевой алгебры $\boldsymbol{B}$ равносильны следующие утверждения.*

(i) *A — тавтология;*

(ii) *$f(A) = U$ для любой оценки $f : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(U)$;*

(iii) *$f(A) = 1$ для любой оценки $f : \mathrm{Var} \to \boldsymbol{B}$.*

Доказательство. Утверждение (iii) влечёт (i), поскольку если $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ — оценка, при которой $f(A) = \text{Л}$, мы можем определить соответствующую оценку $f' : \mathrm{Var} \to \mathbf{B}$ на булевой алгебре $\mathbf{B}$ отождествляя И с $1 \in \mathbf{B}$ и Л с $0 \in \mathbf{B}$. При этом для любой формулы C имеем

$$f(C) = \text{И} \iff f'(C) = 1$$

и тем самым $f'(A) = 0$. Аналогично, (ii) влечёт (i).

Докажем, что (i) влечёт (iii). Допустим, что A тавтология. По теореме о полноте исчисления эквивалентностей, равносильность $A \equiv \top$ выводится из основных и дополнительных эквивалентностей по известным правилам. Индукцией по длине цепочки вывода $A \equiv \top$ на основе леммы 1.78 легко установить, что $f(A) = f(\top) = 1$ при любой оценке f.

Отметим, что (i) влечёт (ii) поскольку $\mathcal{P}(U)$ есть булева алгебра. $\dashv$

2 Исчисление высказываний в секвенциальной форме Генцена

Определение 2.1 *Секвенция* – это выражение $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ, Δ – конечные (возможно пустые) множества формул. *Перевод секвенции* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ есть формула $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$, где по определению $\bigwedge\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, $\bigvee\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$, $\bigvee \varnothing = \bot$, $\bigwedge \varnothing = \top$ и $\bigwedge\{\varphi\} = \bigvee\{\varphi\} = \varphi$.

Замечание 2.2 Порядок конъюнктивных и дизъюнктивных членов и расстановки скобок в формулах $\bigwedge \Gamma$ и $\bigvee \Delta$ определён не однозначно, однако все возможные переводы данной секвенции логически эквивалентны.

Определение 2.3 Исчисление высказываний в форме Генцена задается следующими аксиомами и правилами вывода.

Аксиомы: $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta; \quad \Gamma, \bot \Rightarrow \Delta; \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \top$

Правила вывода:

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \varphi \to \psi \Rightarrow \Delta}\ (\to L) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi, \Delta}\ (\to R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi, \Delta}\ (\vee R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi, \Delta}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta}\ (\neg L) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi, \Delta}\ (\neg R)$$

Определение 2.4 *Выводом* секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется конечное дерево, вершины которого помечены секвенциями, корень помечен $\Gamma \Rightarrow \Delta$, листья помечены аксиомами, а секвенции, записанные во внутренних вершинах, получаются из непосредственно предшествующих по одному из перечисленных выше правил вывода.

Секвенция называется *выводимой* или *доказуемой*, если у неё существует вывод.

Пример 2.5

$$\cfrac{\cfrac{p, q \Rightarrow q \quad p \Rightarrow p, q}{p, p \to q \Rightarrow q}\ (\to R)}{p \wedge (p \to q) \Rightarrow q}\ (\wedge L)$$

Упражнение 2.6 *Приведите пример двух различных выводов одной и той же секвенции.*

Следующее предложение выражает *свойство корректности* секвенциального исчисления высказываний.

Предложение 2.7 *Если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ выводима, то её перевод $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ является тавтологией, то есть, при любой оценке переменных хотя бы одна формулы из Γ ложна или хотя бы одна формула из Δ истинна.*

Доказательство. Предложение доказывается индукцией по построению вывода, то есть необходимо доказать два утверждения:

1. (Базис индукции) Переводы аксиом являются тавтологиями.

2. (Шаг индукции) Если тавтологиями являются переводы всех посылок некоторого правила вывода, то таков и перевод заключения.

Первое утверждение очевидно. Рассмотрим шаг индукции.

Допустим, что заключительная секвенция вывода $\Gamma, \varphi \to \psi \Rightarrow \Delta$ получается по правилу $(\to L)$ с главной формулой $\varphi \to \psi$ и докажем, что перевод этой секвенции является тавтологией. По предположению индукции тавтологиями являются обе посылки этого применения правила.

Допустим, рассуждая от противного, что для некоторой оценки v перевод заключительной секвенции ложен. Тогда $v(\bigwedge \Gamma) = v(\varphi \to \psi) = 1$ и $v(\bigvee \Delta) = 0$. Отсюда следует, что $v(\varphi) = 0$ или $v(\psi) = 1$. В первом случае при оценке v ложен перевод посылки $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$; во втором случае ложен перевод посылки $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$. Таким образом, хотя бы одна из посылок не является тавтологией. Значит, наше допущение неверно, то есть перевод заключительной секвенции — тавтология.

Аналогично рассматриваются случаи всех остальных правил вывода. $\dashv$

Следующее важное утверждение называется *свойством подформульности* секвенциального исчисления.

Предложение 2.8 *Пусть φ — формула, входящая в некоторую секвенцию вывода секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Тогда φ есть подформула некоторой формулы из множества $\Gamma \cup \Delta$.*

Доказательство. Предложение доказывается индукцией по построению вывода. Если $\Gamma \Rightarrow \Delta$ — аксиома, то утверждение очевидно. Каждое из постулированных правил вывода обладает тем свойством, что все формулы, входящие в его посылки являются подформулами некоторых формул из его заключения. (В этом легко убедиться непосредственно.) Поэтому, если секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ получается применением одного из правил вывода и для выводов посылок этого правила свойство подформульности выполняется, то оно выполняется и для заключения. $\dashv$

Наряду с правилами вывода, постулированными для секвенциального исчисления высказываний, мы будем рассматривать и другие правила. В общем случае, *примером* правила вывода мы называем фигуру

$$\frac{S_1, \ldots, S_n}{S}$$

где секвенции $S_1, \ldots, S_n$ называются *посылками*, а S — *заключением* правила. *Правилом вывода* мы называем некоторое множество примеров.[4]

Определение 2.9 Правило вывода называется *допустимым* в данном исчислении, если из выводимости посылок правила (для любого его примера) следует выводимость заключения.

[4] Обычно, такое множество получается из одного примера всевозможными подстановками формул вместо переменных, но для нас эти подробности не важны.

Предложение 2.10 *Следующие правила вывода являются допустимыми:*

(i) *Правило ослабления:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Pi, \Delta}\ (weak)$$

(ii) *Правило подстановки:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma[p/\varphi] \Rightarrow \Delta[p/\varphi]}\ (sub)$$

Здесь $\Gamma[p/\varphi]$ *означает результат замены всех вхождений переменной* p *в формулах из множества* Γ *на формулу* φ.

Для доказательства теоремы о полноте секвенциального исчисления высказываний нам понадобится понятие насыщенной секвенции.

Определение 2.11 Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется *насыщенной*, есливыполняются следующие условия:

1. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ влечёт $\psi \in \Gamma$ или $\varphi \in \Delta$;
2. $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ влечёт $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Delta$;
3. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ влечёт $\varphi, \psi \in \Gamma$;
4. $(\varphi \wedge \psi) \in \Delta$ влечёт $\varphi \in \Delta$ или $\psi \in \Delta$;
5. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ влечёт $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$;
6. $(\varphi \vee \psi) \in \Delta$ влечёт $\varphi, \psi \in \Delta$;
7. $(\neg\varphi) \in \Gamma$ влечёт $\varphi \in \Delta$;
8. $(\neg\varphi) \in \Delta$ влечёт $\varphi \in \Gamma$.

Лемма 2.12 *Если секвенция* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *невыводима, то найдётся невыводимая насыщенная секвенция* $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ *такая, что* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *и* $\Delta \subseteq \Delta'$.

Доказательство. Применяем алгоритм насыщения данной секвенции. Обозначим через S множество всех подформул формул секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Алгоритм состоит в построении последовательности невыводимых секвенций путём добавления в левую и/или правую части секвенции некоторых формул из множества S. На каждом шаге количество добавленных подформул увеличивается. Процесс насыщения останавливается (ничего нового к секвенции добавить нельзя) в точности тогда, когда выполнены все условия 1–8. Алгоритм обязательно завершает работу, поскольку множество S конечно.

Рассмотрим невыводимую секвенцию $\Gamma \Rightarrow \Delta$ и покажем, что в случае, если она не является насыщенной, в её левую и/или правую часть можно добавить новую подформулу некоторой её формулы с сохранением невыводимости. Мы будем называть такой переход *расширением* исходной секвенции.

Если секвенция не насыщена, то нарушается хотя бы одно из условий 1–8. Рассмотрим первые два, все остальные рассматриваются аналогично.

Допустим, что для некоторой формулы $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ неверно, что $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Delta$. Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (равная $\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi, \Delta$) получается из $\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi, \Delta$ применением правила $(\to R)$. Значит, если секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ была невыводима, такова будет и секвенция $\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi, \Delta$. Поскольку неверно, что $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Delta$, эта секвенция строго расширяет $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Допустим, что для некоторой формулы $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ неверно, что $\psi \in \Gamma$ или $\varphi \in \Delta$. Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (равная $\Gamma, \varphi \to \psi \Rightarrow \Delta$) получается из $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$ и $\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta$ по правилу $(\to L)$. Поэтому мы знаем, что хотя бы одна из двух последних секвенций не является выводимой. Обе они строго расширяют $\Gamma \Rightarrow \Delta$. $\dashv$

Следующая теорема называется *теоремой о полноте* секвенциального исчисления высказываний.

Теорема 2.13 *Если перевод секвенции* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *является тавтологией, то она выводима.*

Доказательство. Рассуждаем от противного и допустим, что секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ невыводима. Требуется доказать, что перевод $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ не является тавтологией, то есть для некоторой оценки v все формулы из Γ истинны, а все формулы из Δ ложны.

Пользуясь леммой 4.7 рассмотрим какую-нибудь невыводимую насыщенную секвенцию $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, расширяющую $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Определим оценку v так:

$$v(p) = 1 \overset{\text{def}}{\iff} p \in \Gamma'.$$

Докажем теперь, что для любой формулы φ выполнены условия:

(i) Если $\varphi \in \Gamma'$, то $v(\varphi) = 1$;

(ii) Если $\varphi \in \Delta'$, то $v(\varphi) = 0$.

Оба утверждения доказываются совместной индукцией по построению формулы φ. Если φ — переменная, то первое утверждение верно по определению оценки v, а второе следует из того, что $\varphi \notin \Gamma'$ (в противном случае φ входит в обе части секвенции и последняя была бы выводимой). Если φ — константа $\bot$, то $\varphi \notin \Gamma'$ (в противном случае $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ — аксиома), поэтому верно (i). Утверждение (ii) верно, поскольку всегда $v(\bot) = 0$. В случае, если $\varphi = \top$ рассуждения аналогичны.

Допустим $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Если $\varphi \in \Gamma'$, то по условию 3 насыщенности имеем $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma'$. По предположению индукции $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$. Отсюда $v(\varphi) = v(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1$. Если $\varphi \in \Delta'$, то по условию 4 насыщенности имеем $\varphi_1 \in \Delta'$ или $\varphi_2 \in \Delta'$. По предположению индукции получаем $v(\varphi_i) = 0$ для некоторого i. Значит $v(\varphi) = v(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0$.

Допустим $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$. Если $\varphi \in \Gamma'$, то по условию 1 насыщенности $\varphi_2 \in \Gamma'$ или $\varphi_1 \in \Delta'$. В первом случае $v(\varphi_2) = 1$ откуда следует $v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 1$.

Во втором случае $v(\varphi_1) = 0$ откуда также следует $v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 1$. Значит $v(\varphi) = 1$. Если $\varphi \in \Delta'$, то по условию 2 насыщенности $\varphi_1 \in \Gamma'$ и $\varphi_2 \in \Delta'$. Тогда $v(\varphi_1) = 1$ и $v(\varphi_2) = 0$, то есть $v(\varphi) = v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично с использованием оставшихся условий насыщенности. Тем самым мы доказали утверждения (i) и (ii).

Из условий (i) и (ii) следует, что при оценке v все формулы из Γ истинны, а все формулы из Δ ложны, что и требовалось доказать. $\dashv$

Из теоремы о полноте секвенциального исчисления высказываний вытекает важное следствие.

Следствие 2.14 *Правило сечения*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta}\ (cut)$$

является допустимым в секвенциальном исчислении высказываний.

Замечание 2.15 Выводы в секвенциальном исчислении, расширенном правилом сечения, ближе к структуре естественных доказательств, встречающихся в математике. «Высекаемая» формула φ, входящая в посылки правила, соответствует некоторой используемой в доказательстве вспомогательной лемме. Однако, выводы в расширенном исчислении не обладают свойством подформульности и по этой причине не удобны для поиска и анализа. Поэтому, в исходном формализме Генцена правило сечения постулировалось, а основная теорема Генцена говорила об устранимости этого правила.

3 Интуиционистская логика высказываний

Язык интуиционистской логики высказываний тот же, что и у классической логики: формулы строятся из множества переменных $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \dots\}$ и констант $\bot$ (ложь) и $\top$ (истина) с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$. Как в классической, так и в интуиционистской логике формула $\neg\varphi$ эквивалентна $(\varphi \to \bot)$, и нам будет удобно рассматривать выражение $\neg\varphi$ как сокращённую запись формулы $(\varphi \to \bot)$, чтобы в дальнейшем уменьшить количество разбираемых случаев. Однако следует иметь в виду, что, в отличие от классической логики, в интуиционистской логике ни одна из связок $\to, \wedge, \vee$ не выражается через константы и остальные связки.

Определение 3.1 *Моделью Крипке* называется тройка $\mathcal{W} = (W, \preccurlyeq, v)$, где

- W – непустое множество, называемое множеством «*возможных миров*»,
- $\preccurlyeq$ – частичный порядок на W («*отношение достижимости*»), и
- $v : W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ – оценка переменных на W. Предполагается, что функция v монотонна, то есть, если $v(x, p) = 1$ и $x \preccurlyeq y$, то $v(y, p) = 1$.

Определение 3.2 Отношение $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ *истинности формулы* φ *в мире* x *модели* $\mathcal{W}$ определим индукцией по построению φ:

- $\mathcal{W}, x \vDash p \overset{\text{def}}{\iff} v(x,p) = 1$, если $p \in \mathrm{Var}$;
- $\mathcal{W}, x \vDash \top; \qquad \mathcal{W}, x \nvDash \bot$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \wedge \psi) \overset{\text{def}}{\iff} (\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ и $\mathcal{W}, x \vDash \psi)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \vee \psi) \overset{\text{def}}{\iff} (\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ или $\mathcal{W}, x \vDash \psi)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \to \psi) \overset{\text{def}}{\iff} \forall y \succcurlyeq x\, (\mathcal{W}, y \vDash \varphi \Rightarrow \mathcal{W}, y \vDash \psi)$;

Упражнение 3.3 Убедитесь, что для любой модели Крипке

$$\mathcal{W}, x \vDash \neg\varphi \iff \forall y \succcurlyeq x\, (\mathcal{W}, y \nvDash \varphi).$$

Определение 3.4 Формула φ называется *интуиционистской тавтологией* (сокращённо *и-тавтологией*), если φ истинна в любом мире любой модели Крипке.

Упражнение 3.5 Убедитесь в том, что формула $p \to p$ является и-тавтологией, а формула $p \vee \neg p$ не является.

Интуицию, связанную с понятием модели Крипке, часто описывают в терминах так называемой *информационной интерпретации*, одним из первых которую рассмотрел польский ученый А. Гжегорчик. При таком подходе миры модели Крипке соответствуют состояниям знаний некоторого агента. Этот агент может быть ученым, изучающим какую-то область знаний, например математику, обучающимся роботом или просто пополняемой базой данных. Идеализация ситуации состоит в том, что знания агента не корректируются, а лишь пополняются в ходе его деятельности. Таким образом, если какой-то факт был установлен (попал в базу знаний), то он уже не может быть оттуда удалён и быть признан ложным.

В соответствии со сказанным выше, множество миров некоторой модели Крипке есть множество всех принципиально возможных состояний знаний данного агента. Отношение достижимости на множестве миров выражает то, как могут осуществляться переходы между различными состояниями при получении агентом новой информации.

Пример 3.6 (подбрасывание монетки). Предположим, что мы моделируем ситуацию, в которой монетка подбрасывается несколько раз. Предполагается, что может быть *три* исхода подбрасывания монеты: выпадение орла (0), решки (1) или результат неизвестен (например, в случае, если монетка потерялась). Мы подбрасываем монетку до тех пор, пока не получим результат.

В этом эксперименте имеются три возможных состояния знаний агента: 0, 1 и $\varnothing$. В начальный момент знание пусто $\varnothing$. После подбрасывания мы или

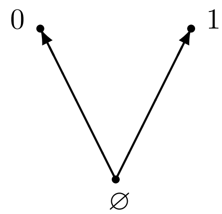

Рис. 1: подбрасывание монетки.

переходим в 0 (узнав исход 0), или в 1 (аналогично), или возвращаемся в исходное состояние $\varnothing$. Ситуация передаётся моделью Крипке, изображенной на рисунке 1.

В соответствии с информационной интерпретацией константа $\top$ понимается как заведомо известное утверждение, а константа $\bot$ как заведомо неизвестное (ложное во всех возможных мирах) утверждение. Связки $\wedge$ и $\vee$ понимаются классически. Существенно меняется лишь понимание импликации и, как следствие, отрицания. В данном мире x импликация $\varphi \to \psi$ считается истинной (то есть, известной агенту), если во всех возможных ситуациях, при которых агенту станет известно φ, ему также станет известно ψ. Другими словами, в мире x агенту уже известно, что утверждение ψ сводится в φ. [5]

Предложение 3.7 *Всякая интуиционистская тавтология является классической. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть φ не является классической тавтологией. Тогда для некоторой оценки w значение $w(\varphi) = 0$. Рассмотрим модель Крипке $\mathcal{W}$, состоящую из единственного мира, который мы обозначим a. Определим интуиционистскую оценку v равенством $v(a,p) := w(p)$ для всех переменных p. Индукцией по построению формулы ψ показываем, что для любой формулы ψ

$$w(\psi) = 1 \iff \mathcal{W}, a \models \psi.$$

Таким образом, $\mathcal{W}, a \not\models \varphi$, а значит φ не является интуиционистской тавтологией.

Решение упражнения 3.5 показывает, что классический закон исключенного третьего интуиционистской тавтологией не является. $\dashv$

[5] В математике такая ситуация возникает, когда какие-то утверждения доказываются по модулю открытых гипотез, таких как гипотеза Римана в теории чисел или гипотеза $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. Как только рассматриваемая гипотеза подтвердится, мы автоматически убедтмся в справедливости всех ранее полученных из нее следствий. А в данный момент нам известна лишь импликация, то есть тот факт, что данное утверждение следует из данной гипотезы.

Следующее предложение показывает, что истинность формулы в модели Крипке правильно отражает идею сохранения информации при переходе к достижимым мирам.

Предложение 3.8 (принцип монотонности) *Для любой модели Крипке $\mathcal{W}$ и формулы φ, если $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ и $x \preccurlyeq y$, то $\mathcal{W}, y \vDash \varphi$.*

Следующее важное свойство интуиционистской логики также резко отличает её от классической.

Предложение 3.9 (дизъюнктивное свойство) *Если формула $\varphi \vee \psi$ – интуиционистская тавтология, то таковой является одна из формул φ или ψ.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существуют модели Крипке $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$ такие, что $\mathcal{W}_1, a_1 \nvDash \varphi$ и $\mathcal{W}_2, a_2 \nvDash \psi$. Мы можем считать, что их множества миров не пересекаются. Рассмотрим новую модель $\mathcal{U}$, которая получается из объединения моделей $W_1 \cup W_2$ присоединением нового "корня" a, лежащего ниже всех элементов моделей $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$. Таким образом, в модели U имеет место $a \preccurlyeq x$ для всех миров $x \in W_1 \cup W_2$. Все переменные в корне a модели $\mathcal{U}$ объявим ложными; отметим, что это можно сделать не нарушив оценку во всех остальных мирах и сохранив условие монотонности оценки.

Заметим, что в построенной модели по прежнему $\mathcal{U}, a_1 \nvDash \varphi$ и $\mathcal{U}, a_2 \nvDash \psi$, поскольку выше точек a_1, a_2 ничего не изменилось. В силу принципа монотонности оценки (поскольку точка a лежит ниже как точки a_1, так и точки a_2), ни формула φ, ни формула ψ не может быть истинной в a. Отсюда следует $\mathcal{U}, a \nvDash \varphi \vee \psi$, то есть $\varphi \vee \psi$ не является интуиционистской тавтологией. $\dashv$

4 Интуиционистское исчисление высказываний в секвенциальной форме

Определение 4.1 *Интуиционистское исчисление высказываний* **IPC** получается из классического следующими модификациями:

- Мы рассматриваем отрицание как определимую связку: $\neg\varphi$ понимается теперь как сокращенная запись формулы $\varphi \to \bot$. Это изменение внесено лишь в целях экономии и позволяет избавиться от правил вывода $(\neg L)$ и $(\neg R)$.
- Правило $(\to R)$ заменяется на следующее:

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi, \Delta}\ (\to R_i).$$

Пример 4.2 Вывод секвенции $p \Rightarrow \neg\neg p$:

$$\dfrac{\dfrac{p, \bot \Rightarrow \bot \quad p \Rightarrow \bot, p}{p, p \to \bot \Rightarrow \bot}}{p \Rightarrow (p \to \bot) \to \bot}\ .$$

Отметим, что интуиционистское исчисление высказываний, так же как и классическое, замкнуто относительно правил *ослабления* и *подстановки* и обладает *свойством подформульности*. Тем самым, существует алгоритм, проверяющий данную секвенцию на выводимость в интуиционистском исчислении высказываний.

Упражнение 4.3 *Покажите, что секвенции* $\Rightarrow p \vee \neg p$ *и* $\neg\neg p \Rightarrow p$ *не являются выводимыми в* **IPC**.

Следующее предложение выражает *свойство корректности* интуиционистского исчисления высказываний.

Предложение 4.4 *Если* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *выводима, то её перевод* $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ *является интуиционистской тавтологией, то есть, в любом мире любой модели Крипке хотя бы одна формула из* Γ *ложна или хотя бы одна формула из* Δ *истинна.*

Теорема 4.5 *Если перевод секвенции* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *является интуиционистской тавтологией, то она выводима.*

Доказательство. Мы следуем канве доказательства полноты классического исчисления высказываний. Сначала нам необходимо ослабить понятие насыщенной секвенции, исключив условия, касающиеся правил для отрицания и правила $(\to R)$.

Определение 4.6 Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется *интуиционистски насыщенной*, если выполняются следующие условия:

1. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ влечёт $\psi \in \Gamma$ или $\varphi \in \Delta$;
2. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ влечёт $\varphi, \psi \in \Gamma$;
3. $(\varphi \wedge \psi) \in \Delta$ влечёт $\varphi \in \Delta$ или $\psi \in \Delta$;
4. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ влечёт $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$;
5. $(\varphi \vee \psi) \in \Delta$ влечёт $\varphi, \psi \in \Delta$;

Следующая лемма о насыщении секвенции доказывается так же, как и в классическом случае.

Лемма 4.7 *Если секвенция* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *невыводима в* ***IPC****, то найдётся невыводимая в* ***IPC*** *насыщенная секвенция* $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ *такая, что* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *и* $\Delta \subseteq \Delta'$.

Для доказательства теоремы 4.5 допустим, что секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ не выводима в **IPC**. Опровергающая модель Крипке для данной секвенции будет составлена из насыщенных секвенций, состоящих из подформул формул множества $\Gamma \cup \Delta$. Множество всех таких секвенций обозначим W (отметим, что существует лишь конечное число таких секвенций).

Пусть $x \in W$ имеет вид $\Sigma \Rightarrow \Pi$, а $y \in W$ имеет вид $\Sigma' \Rightarrow \Pi'$. Мы положим

$$x \preccurlyeq y \overset{\text{def}}{\iff} \Sigma \subseteq \Sigma'.$$

Заметим, что это отношение является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным, как и требуется в определении модели Крипке.

Оценку v переменных в модели $\mathcal{W}$ определим так:

$$v(x, p) = 1 \overset{\text{def}}{\iff} p \in \Sigma.$$

Докажем теперь следующее более общее свойство.

Лемма 4.8 *Для любого мира $x \in W$, где x имеет вид $\Sigma \Rightarrow \Pi$,*

(i) *Если $\varphi \in \Sigma$, то $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$;*

(ii) *Если $\varphi \in \Pi$, то $\mathcal{W}, x \nvDash \varphi$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) доказываются одновременно индукцией по построению формулы φ.

Если φ — переменная, то (i) следует из определения оценки. Для доказательства (ii) рассуждаем от противного и допустим, что переменная $\varphi \in \Pi$ и $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$. Тогда по определению оценки $\varphi \in \Sigma$, а в этом случае секвенция $\Sigma \Rightarrow \Pi$ является аксиомой, то есть не может входить в W.

Если $\varphi = \top$, то в утверждении (i) верно заключение, а в утверждении (ii) ложна посылка, поскольку, если $\top \in \Pi$, то секвенция $\Sigma \Rightarrow \Pi$ есть аксиома.

Если $\varphi = \bot$, то в утверждении (i) ложна посылка, а в утверждении (ii) истинно заключение.

Пусть $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Если $\varphi \in \Sigma$, то по условию 2 интуиционистской насыщенности имеем $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma$. По предположению индукции $\mathcal{W}, x \vDash \varphi_1, \varphi_2$. Отсюда $\mathcal{W}, x \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Если $\varphi \in \Pi$, то по условию 3 насыщенности имеем $\varphi_1 \in \Pi$ или $\varphi_2 \in \Pi$. По предположению индукции получаем $\mathcal{W}, x \nvDash \varphi_i$ для некоторого i. Значит, $\mathcal{W}, x \nvDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Пусть $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. В этом случае рассуждение аналогично, с использованием условий 4 и 5 интуиционистской насыщенности.

Допустим $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$. Для случая (i) допустим $\varphi \in \Sigma$ и покажем, что $\forall y \succcurlyeq x\, (\mathcal{W}, y \vDash \varphi_1 \;\Rightarrow\; \mathcal{W}, y \vDash \varphi_2)$. В силу определения истинности импликации в модели Крипке это и будет означать, что $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$.

Итак, рассмотрим любой мир $y \in W$ такой, что $y \succcurlyeq x$. Считаем, что y имеет вид $\Sigma' \Rightarrow \Pi'$. Поскольку $y \succcurlyeq x$ мы имеем $\Sigma \subseteq \Sigma'$, а следовательно $\varphi \in \Sigma'$. По условию 1 насыщенности секвенции y мы имеем $\varphi_2 \in \Sigma'$ или $\varphi_1 \in \Pi'$. По предположению индукции в первом случае $\mathcal{W}, y \vDash \varphi_2$, а во втором случае

$\mathcal{W}, y \not\models \varphi_1$. Таким образом, мы показали, что для любого $y \succcurlyeq x$, $\mathcal{W}, y \not\models \varphi_1$ или $\mathcal{W}, y \models \varphi_2$, что и требовалось.

Для случая (ii) допустим, что $\varphi \in \Pi$ и докажем, что существует $y \succcurlyeq x$ такой, что $\mathcal{W}, y \models \varphi_1$ и $\mathcal{W}, y \not\models \varphi_2$. Это и будет означать, что $\mathcal{W}, x \not\models \varphi$.

Рассмотрим секвенцию $\Sigma, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$. Эта секвенция невыводима, поскольку в противном случае секвенция $\Sigma \Rightarrow \Pi$ выводится из неё по правилу $(\rightarrow R_i)$. Пусть $\Sigma' \Rightarrow \Pi'$ — невыводимое насыщение этой секвенции, которое мы обозначим через y. Заметим, что $y \in W$ и $\Sigma \subseteq \Sigma'$, поэтому $x \preccurlyeq y$. Поскольку $\varphi_1 \in \Sigma'$ и $\varphi_2 \in \Pi'$, по предположению индукции $\mathcal{W}, y \models \varphi_1$ и $\mathcal{W}, y \not\models \varphi_2$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана. $\dashv$

Завершим доказательство теоремы. Поскольку данная секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ невыводима, то по лемме о насыщении найдётся насыщенная невыводимая секвенция $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Delta \subseteq \Delta'$. Обозначим $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ через x и заметим, что $x \in W$. По доказанной лемме все формулы из Γ' (а значит и из множества Γ) истинны в x, а все формулы из Δ' (а значит и из Δ) ложны в x, что и требовалось доказать. $\dashv$

Из доказательства теоремы 4.5 вытекает следующее предложение, называемое *свойством конечных моделей*.

Предложение 4.9 *Если формула φ не является интуиционистской тавтологией, то она опровергается на некоторой* конечной *модели Крипке.*

Более того, можно оценить сверху количество возможных миров в опровергающей модели величиной 2^{2n}, где n — количество различных подформул формулы φ. В самом деле, каждый мир представляет собой некоторую секвенцию, составленную из подформул φ, то есть упорядоченную пару подмножеств n-элементного множества всех подформул формулы φ. Всего таких подмножеств не более 2^n, а упорядоченных пар — не более $2^n \cdot 2^n$.