

Майнор логика, 2019. Семинар 1.

<http://www.mi.ras.ru/~bekl/minorlogic2019.html>

1. (Задачи от Льюиса Кэрролла) Сделать из набора утверждений логически обоснованный вывод. Помогает формализовать каждое утверждение как импликацию в логике высказываний и применять правила силлогизма и контрапозиции.¹
 - (a) I despise anything that cannot be used as a bridge.
Everything, that is worth writing an ode to, would be a welcome gift to me.
A rainbow will not bear the weight of a wheelbarrow.
Whatever can be used as a bridge will bear the weight of a wheelbarrow.
I would not take, as a gift, a thing that I despise.
 - (b) No one, who is going to a party, ever fails to brush his hair.
No one looks fascinating, if he is untidy.
Opium eaters have no self-command.
Everyone, who has brushed his hair, looks fascinating.
No one wears white kid gloves, unless he is going to a party.
A man is always untidy, if he has no self-command.
 - (c) Promise breakers are untrustworthy.
Wine drinkers are very communicative.
A man who keeps his promises is honest.
No teetotalers are pawnbrokers.
One can always trust a very communicative person.
 - (d) All writers, who understand human nature, are clever.
No one is a true poet unless he can stir the hearts of men.
Shakespeare wrote "Hamlet".
No writer, who does not understand human nature, can stir the hearts of men.
None but a true poet could have written "Hamlet".
2. Составьте таблицу истинности для формулы $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow r)$.
3. Определите, является ли каждая из данных формул тавтологией, выполнимой, тождественно ложной: p , $\neg\neg p \vee p$, $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$, $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$, $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.
4. Равносильны ли формулы:
 - (a) $\neg p \wedge \neg q$ и $\neg(p \vee q)$
 - (b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ и $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

¹Для решения задачи необязательно понимать смысл некоторых английских слов.

- (c) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ и $(p \wedge q) \rightarrow r$
 (d) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ и $p \vee q$
5. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме:
- (a) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
 (b) $(r \vee p) \leftrightarrow (r \wedge q)$
6. Можно ли выразить связки:
- (a) \rightarrow через \wedge и \vee ;
 (b) \rightarrow через \leftrightarrow ;
 (c) \vee через \rightarrow .
7. Является ли полным набор связок:
- (a) $\{\rightarrow, \wedge\}$;
 (b) $\{\leftrightarrow, \perp\}$;

Более сложные задачи

8. (Лемма об однозначном прочтении) Докажите, что всякая формула логики высказываний в языке со связками \neg, \wedge есть или переменная, или однозначно представляется в виде $\neg A$ или $(A \wedge B)$. Докажите единственность дерева разбора любой формулы логики высказываний.
9. Докажите единственность дерева разбора любой формулы в польской записи.
10. Сколько вхождений подслов может иметь слово длины n в двухбуквенном алфавите?
11. Докажите, что число различных подформул формулы логики высказываний не превосходит её длины (количества символов).

Домашнее задание

19. Приведите к ДНФ формулу: $(p \vee q) \rightarrow (p \vee \neg r)$
20. Докажите, что следующая формула является тавтологией для любого n :

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^n p_{ij} \rightarrow \bigvee_{j=1}^n \bigvee_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j}).$$