

Интуиционистская логика высказываний и модели Крипке

Моделью Крипке называется тройка $\mathcal{W} = (W, \preceq, v)$ такая, что

- W — это непустое множество, называемое множеством «возможных миров»,
- \preceq — это частичный порядок на W , называемый отношением достижимости,
- $v: W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ — это оценка переменных на W . Предполагается, что функция v монотонна, то есть, если $v(x, p) = 1$ и $x \preceq y$, то $v(y, p) = 1$.

Отношение $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ истинности формулы φ в мире x модели \mathcal{W} определяется по индукции:

- $\mathcal{W}, x \vDash p \iff v(x, p) = 1$, если $p \in \text{Var}$; $\mathcal{W}, x \vDash \top$; $\mathcal{W}, x \not\vDash \perp$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \wedge \psi) \iff (\mathcal{W}, x \vDash \varphi \text{ и } \mathcal{W}, x \vDash \psi)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \vee \psi) \iff (\mathcal{W}, x \vDash \varphi \text{ или } \mathcal{W}, x \vDash \psi)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \rightarrow \psi) \iff \forall y \succeq x (\mathcal{W}, y \vDash \varphi \Rightarrow \mathcal{W}, y \vDash \psi)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash \neg\varphi \iff \forall y \succeq x (\mathcal{W}, y \not\vDash \varphi)$.

Формула φ называется *интуиционистской тавтологией* (*и-тавтологией*), если φ истинна в любом мире любой модели Крипке.

1. Доказать, что для любой модели Крипке \mathcal{W} и формулы φ , если $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ и $x \preceq y$, то $\mathcal{W}, y \vDash \varphi$.
2. Установить, являются ли следующие формулы и-тавтологиями:
 - a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$;
 - b) $p \rightarrow \neg\neg p$;
 - c) $\neg\neg p \rightarrow p$;
 - d) $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$;
 - e) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
 - f) $(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee \neg p)$;
 - g) $\neg p \vee \neg\neg p$.
3. (Дизъюнктивное свойство) Доказать, что если $\varphi \vee \psi$ является и-тавтологией, то таковой является по крайней мере одна из формул φ или ψ . Верно ли это для классической логики?
4. (Допустимое, невыводимое правило) Доказать, что если формула φ_1 вида $\neg\varphi \rightarrow (\psi \vee \theta)$ и-тавтология, то такова и формула φ_2 вида $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \rightarrow \theta)$. Является ли и-тавтологией $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$? Существуют ли аналогичные примеры для классической логики?
5. (Теорема Гливленко) Доказать, что φ является классической тавтологией тогда и только тогда, когда $\neg\neg\varphi$ является и-тавтологией.
6. Придумать формулу, истинную на всех моделях Крипке, для которых отношение \preceq есть линейный порядок, но которая не является и-тавтологией.
7. Придумать формулу от одной переменной p , опровергаемую на некоторой модели глубины 2, но истинную на всех моделях глубины 1.

Домашнее задание

8. Является ли интуиционистской тавтологией следующая формула:

$$((\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee \neg p)) \rightarrow (\neg p \vee \neg\neg p)?$$