

**Исчисление высказываний в секвенциальной форме Генцена**

*Секвенция* – это выражение  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , где  $\Gamma, \Delta$  – конечные (возможно пустые) множества формул. *Перевод секвенции*  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  есть формула  $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ , где  $\bigvee \emptyset = \perp$  и  $\bigwedge \emptyset = \top$ .

**Аксиомы:**  $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$ ;  $\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta$ ;  $\Gamma \Rightarrow \Delta, \top$

**Правила вывода:**

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} (\rightarrow L) \quad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi, \Delta} (\rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} (\vee L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi, \Delta} (\vee R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} (\wedge L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi, \Delta} (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg \varphi \Rightarrow \Delta} (\neg L) \quad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg \varphi, \Delta} (\neg R)$$

*Выводом* секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  называется конечное дерево, вершины которого помечены секвенциями, корень помечен  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , листья помечены аксиомами, а секвенции, записанные во внутренних вершинах, получаются из непосредственно предшествующих по одному из правил вывода.

1. Постройте выводы секвенций:

- (a)  $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$ ;
- (b)  $p \rightarrow q, p \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$ ;
- (c)  $p \rightarrow q \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ ;
- (d)  $\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ;
- (e)  $\Rightarrow \neg \neg p \vee \neg p$ .

2. Докажите (опираясь на анализ возможных выводов), что следующие секвенции не являются выводимыми:

- (a)  $\neg p \Rightarrow p$ ;

$$(b) p \Rightarrow p \wedge q;$$

$$(c) p \rightarrow q \Rightarrow \neg p \rightarrow \neg q;$$

$$(d) \emptyset \Rightarrow \emptyset.$$

3. Правило вывода называется *допустимым*, если из выводимости посылок правила следует выводимость его заключения. Докажите, что следующие правила вывода допустимы:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi, \Delta} (a) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta} (b) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi, \psi, \Delta} (c)$$

### Домашнее задание

4. Постройте вывод секвенции:  $\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$ .
5. Докажите, что следующая секвенция невыводима:  $\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$ .