

### Интуиционистское исчисление высказываний

В интуиционистском исчислении высказываний **ИРС** отрицание является определяемой связкой, то есть  $\neg\varphi$  понимается как сокращенная запись формулы  $(\varphi \rightarrow \perp)$ .

Исчисление **ИРС** задаётся следующими аксиомами и правилами вывода.

**Аксиомы:**  $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$ ;  $\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta$ ;  $\Gamma \Rightarrow \Delta, \top$

**Правила вывода:**

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} (\rightarrow L) \quad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi, \Delta} (\rightarrow R_i)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} (\vee L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi, \Delta} (\vee R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} (\wedge L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi, \Delta} (\wedge R)$$

1. Выведите в **ИРС** секвенции

- $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi$ ,
- $\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ ,
- $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ ,
- $\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ ,
- $\neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ .

2. Докажите путём анализа возможных выводов, что следующие классические тавтологии не выводимы в **ИРС**:

- $p \vee \neg p$ ,
- $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ .

Предъявите для этих формул опровергающие модели Крипке.

3. Допустимы ли в исчислении **ИРС** следующие правила вывода:

- $\frac{\varphi \rightarrow \neg\psi}{\psi \rightarrow \neg\varphi}$ ,
- (трудная)  $\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi}{\varphi}$ ?
- (простая) Допустимы ли эти правила в классическом исчислении высказываний?