Майнор логика, 2019. Семинар 5.
http://www.mi-ras.ru/∼bekl/minorlogic2019.html

Исчисление предикатов

Определения и обозначения. *Теорией* сигнатуры Σ называется множество замкнутых формул Σ. $T \vdash A$ означает, что формула A *выводима в теории* T, то есть для некоторого конечного $\Gamma \subseteq T$ секвенция $\Gamma \Rightarrow A$ выводима в исчислении предикатов (см. стр. 2). $\vdash A$ означает, что A выводима в исчислении предикатов (в пустой теории). $T \vdash S$ означает, что все формулы из S выводимы в T. $T \equiv S$ означает $T \vdash S$ и $S \vdash T$. Теория T называется *конечно аксиоматизируемой*, если $T \equiv S$ для некоторого конечного множества формул S. T называется *полной*, если T непротиворечива и для любой замкнутой формулы A в языке T имеет место $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

1. Постройте выводы секвенций в исчислении предикатов:
   (a) $\forall v_0\, P(v_0) \Rightarrow \exists v_1\, Q(v_1)$;
   (b) $\Rightarrow P(a) \to \exists x\, P(x)$;
   (c) $\exists x\, \forall y\, P(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, P(x, y)$.

2. Запишите в виде формулы логики предикатов следующий известный в Германии принцип: «В пивной всегда найдется такой человек, что если он пьёт, то и все остальные пьют.» (Рассмотрите модель, носителем которой является множество всех людей в данной пивной.) Докажите, общезначимость этого принципа. Постройте его вывод в исчислении предикатов.

3. Обсудите формализацию одной из задач Льюиса Кэролла в логике предикатов с явно выписанными кванторами.

4. Докажите допустимость следующих правил в исчислении предикатов:
   (a) $T \vdash \forall x A[a/x]$, если и только если $T \vdash A$;
   (b) (теорема о дедукции) Если формула A замкнута, то $T \vdash A \to B$, если и только если $T \cup \{A\} \vdash B$;
   (c) (правило контрапозиции) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\neg B \to \neg A)$;
   (d) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x A \to \exists x B)$.

В решении всех следующих задач можно пользоваться теоремами о полноте и о компактности для логики предикатов.

3. Множество $\mathsf{Th}(M)$ всех предложений истинных в модели M называется *элементарной теорией модели* M. Докажите: теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M для которой $T \equiv \mathsf{Th}(M)$.

4. Докажите, что $\mathsf{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot) \neq \mathsf{Th}(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

5. Докажите, что всякая непротиворечивая теория T имеет полное расширение $S \vdash T$ той же сигнатуры.

6. Пусть $B = \exists x_1 \ldots \exists x_n A$ — формула в языке без функциональных символов и констант, где A бескванторна. Докажите, что если B выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

7. (*) Теорией с равенством называем теорию в сигнатуре, содержащей символ $=$, и аксиомы равенства (см. стр. 2). Докажите, что непротиворечивая теория с равенством имеет модель, в которой $x = y$ интерпретируется как совпадение элементов x и y.

8. (*) Если формула A выполнена на всех бесконечных группах, то A выполнена на всех конечных группах мощности больше некоторого $n \in \mathbb{N}$.

9. (*) *Спектром* формулы A назовём множество $\{n \in \mathbb{N} \mid A \text{ имеет модель мощности } n\}$.

   (a) Постройте формулу в сигнатуре с равенством, которая имеет спектр $\{2, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$;

   (b) Докажите, что совокупность спектров всех формул (произвольной сигнатуры) замкнута относительно операций пересечения и объединения;

   (c) Существует ли формула, спектр которой есть множество всех чётных чисел?

   (d) Существует ли такая формула в сигнатуре только с символом равенства?

   (e) Существует ли такая формула в сигнатуре без символа равенства?

10. (*) (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x A(x)$, где A — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \ldots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$. *Указание.* Можно рассуждать от противного и воспользоваться теоремой о компактности. Можно дать прямое доказательство, проанализировав возможные выводы в исчислении предикатов.

Исчисление предикатов.

Исчисление предикатов сигнатуры Σ получается присоединением ко всем аксиомам и правилам вывода исчисления высказываний для формул сигнатуры Σ следующих правил для кванторов:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (\forall x \varphi[a/x]) \Rightarrow \Delta}\ (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (\forall x \varphi[b/x]), \Delta}\ (\forall R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (\exists x \varphi[b/x]) \Rightarrow \Delta}\ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi[a/t], \Delta}{\Gamma \Rightarrow (\exists x \varphi[a/x]), \Delta}\ (\exists R).$$

Здесь свободная переменная b *не входит* в $\Gamma \cup \Delta$, а x не входит в φ.

Аксиомы равенства.

1. $\forall x\, x = x$;

2. $\forall x, y\, (x = y \to y = x)$; $\quad \forall x, y, z\, (x = y \wedge y = z \to x = z)$; $\quad \forall \vec{x}\, \forall \vec{y}\, (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n)))$;

3. $\forall \vec{x}\, \forall \vec{y}\, (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$.