Майнор логика, 2019. Семинар 6.

http://www.mi-ras.ru/~bekl/minorlogic2019.html

Модальная логика

Формулы модальной логики высказываний строятся из переменных и констант $\top$ и $\bot$ с помощью булевых связок и одноместной связки $\Box$, назывемой модальностью. Формула $\Box\varphi$ читается как «необходимо φ». Связка $\Diamond\varphi$ понимается как сокращение $\neg\Box\neg\varphi$ (читается «возможно φ»). Определение модальных логик K, K4, S4 и S5 см. ниже.

1. Являются ли следующие формулы тождественно истинными во всех моделях Крипке указанных модальных логик:

a) $p \to \Box p$ в логике S4,
b) $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$ в логике K4,
c) $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ в логике K4,
d) $\Box p \vee \Box\neg p$ в логике S5,
e) $p \to \Box\Diamond p$ в логике S5,
f) $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ в логике K.

2. Постройте выводы формул:

a) $\Box(p \wedge q) \to \Box p$ в логике K,
b) $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge \Box q)$ в логике K4,
c) $\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$ в логике K.

3. (Перевод Гёделя интуиционистской логики в модальную)

Сопоставим произвольной формуле φ интуиционистской логики модальную формулу $\varphi^\Box$ следующим образом:

$p^\Box = \Box p$, $\bot^\Box = \bot$, $\top^\Box = \top$, $(\varphi \circ \psi)^\Box = \Box(\varphi^\Box \circ \psi^\Box)$, где $\circ$ — бинарная связка $\wedge, \vee$ или $\to$.

a) Докажите, что для любой формулы φ ($\mathrm{IPC} \vdash \varphi \iff \mathrm{S4} \vdash \varphi^\Box$).

b) Можно ли упростить этот перевод с сохранением свойства **a)**?

4. Сколько неэквивалентных формул в логике S4 можно получить из единственной переменной p с помощью лишь связок $\neg$ и $\Box$? (*Ответ:* 14, для его понимания можно воспользоваться предыдущей задачей и интуиционистской тавтологией $\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p$.)

5. Докажите допустимость следующих правил вывода в логике K4:

a) $\mathrm{K4} \vdash \Box\varphi$ влечет $\mathrm{K4} \vdash \varphi$;

b) $\mathrm{K4} \vdash \Box\varphi \vee \Box\psi$ влечет $\mathrm{K4} \vdash \varphi$ или $\mathrm{K4} \vdash \psi$.

Аксиомами модальной логики K являются

(i) Все тавтологии классической логики высказываний;

(ii) Схема аксиом K: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;

Правила вывода:

$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ (modus ponens) $\qquad \dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$ (nec)

Другие модальные логики получаются расширением системы K одной или несколькими из следующих схем аксиом:

(T) $\Box\varphi \to \varphi$;

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$;

(5) $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$.

В частности, K4 есть K $+(4)$; S4 есть K4 + (T); S5 есть S4 + (5).

Этим логикам соответствуют следующие классы шкал Крипке: K – класс всех шкал; K4 – класс транзитивных шкал; S4 – класс транзитивных и рефлексивных шкал; S5 – класс всех шкал, в которых отношение достижимости есть отношение эквивалентности.