Задачи по спецкурсу Л.Д. Беклемишева и В.Б. Шехтмана

Множества и модели, 2014 г.

1. Транзитивным замыканием множества x называется наименьшее транзитивное множество $\mathrm{TC}(x)$, содержащее x. Докажите, что $\mathrm{TC}(x)$ существует и единственно для любого множества x.

2. Для любого кардинала κ положим $H_\kappa = \{x : |\mathrm{TC}(x)| < \kappa\}$. (a) Докажите, что H_κ транзитивно и является множеством. (б) Докажите, что $H_\kappa \vDash \mathsf{ZFC} \setminus \{Pow\}$ в случае, если κ — регулярный бесконечный кардинал.

3. Докажите, что любые две изоморфные транзитивные модели совпадают и изоморфизм является тождественным отображением.

4. Для любой транзитивной модели M докажите, что $\forall \alpha \in M\ V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$.

5. Докажите, что отношение «x счётно» выразимо Σ_1-формулой в ZFC.

6. Докажите, что отношения «x конечно» и $rk(x) = y$ являются Δ_1 в ZFC.

7. Пусть r_α означает α-й по счёту регулярный бесконечный кардинал. (a) Докажите, что для любого $\alpha \in \mathrm{On}$ существует единственный $\kappa = r_\alpha$. (b) Докажите, что $\alpha = r_\alpha$, если и только если α слабо недостижим.

8. Пусть M — транзитивный класс, $\mathrm{On} \subseteq M$. Докажите, что $M \vDash \mathsf{ZF}$, если и только если выполняются два условия:

(i) M замкнут относительно гёделевых операций $G_1, \ldots, G_{10}$;

(ii) $\forall x \subset M\ \exists y \in M\ x \subseteq y$.

9. Вспомнив доказательство выполнимости континуум-гипотезы в L установите, что существует конечная подтеория $T \subseteq \mathsf{ZF}$ такая, что для любого транзитивного множества M

$$M \vDash T \iff (M = L_\lambda \text{ для некоторого } \lambda \in \mathrm{Lim}).$$