Oefenopgaves Wiskunde voor Neurale Netwerken
17 september 2004

1. Van de site:

   Given two different points A and B in $\mathbb{R}^2$ find an equation defining the straight line going through A and B.

   Solution 1: *The equation has the form $ax + by = c$. Substituting the coordinates of A for x and y validates the equation, similarly for B. So, we obtain a system of two linear equations with the unknowns a, b and c. Solve this system and take any non-zero solution for the sought a, b and c.*

   Solution 2: *Vector (a, b) is orthogonal to the line defined by $ax+by = c$. Also: $(-b, a)$ is orthogonal to (a, b). Now let (u, v) be the coordinates of the vector $B - A$. Then we can take $a = -v$ and $b = u$.*

   (a) Pas Solution 1 toe op $A = (1, 2), B = (2, 0)$.

   (b) Pas Solution 2 toe op dezelfde punten. Hoe vind je de waarde voor c?

   (c) In Solution 2 gebruik je het feit dat vector (a, b) loodrecht (=orthogonal) staat op de lijn $ax+by = c$. Toon aan dat dit inderdaad altijd een feit is, voor willekeurige a, b en c.

   (d) Laat ook zien dat voor willekeurige a, b de vector (a, b) loodrecht staat op de vector $(-b, a)$. Hoe verhoudt de vector $(-2a, -2b)$ zich tot deze twee vectoren?

   (e) Van de site:

   Solve the same question in an n-dimentional space, that is, find the equation of the straight line going through two given points A and B. (It is easier to generalize Solution 2 above.)

2. Gegeven zijn twee convexe subsets C en $D \subset \mathbb{R}^4$. Er geldt $C \cap D = \emptyset$ en verder is bekend dat er geen ander punt in C dichterbij D ligt dan punt c. Punt d is het dichtst bij C gelegen punt uit D.

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Geef de afstand tussen c en d.

(b) Geef de vergelijking van een hyperplane die de ruimte $\mathbb{R}^4$ zodanig scheidt dat C en D aan weerszijden van deze hyperplane liggen.

3. Gegeven is een systeem van lineaire vergelijkingen $A\vec{x} = \vec{b_1}$ met:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Geef een oplossingsvector $\vec{x}$.

(b) Hoeveel mogelijke oplossingen kent dit systeem?

(c) Geef aan hoeveel oplossingen er bestaan voor de volgende vectoren $\vec{b_2}, \vec{b_3}$ in plaats van $\vec{b_1}$. Geef een oplossing als deze bestaat.

$$\vec{b_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Zijn de rijen van A lineair afhankelijk? En de kolommen?

(e) Hoe zit het met de lineaire afhankelijkheid van de kolommen samen met $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ en $\vec{b_3}$. (Dus, zijn de kolommen samen met $\vec{b_1}$ lineair afhankelijk? Idem voor $\vec{b_2}, \vec{b_3}$.)