Uitwerking Proeftentamen

Wiskunde voor Neurale Netwerken

5 November 2004

1. Extrema

   (a)

   $$<\nabla f|_{(2,1)}, \vec{v}> = -6/\sqrt{2} \; (= -3\sqrt{2})$$

   (b)

   $$H_g = \begin{pmatrix} 2 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

   Extrema:

   $$(0, 0)$$

   $$H_g|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Uit deze Hessian valt niet te zeggen of het een minimum of maximum (of zadelpunt) is. Echter:

   $$g(-2, -2) = -3 \; < \; g(0, 0) = 1 \; < \; g(2, -2) = 13$$

   Omdat er punten zijn die hoger liggen en punten die lager liggen, kan het gevonden punt (0,0) alleen maar een zadelpunt zijn.

2. Taylorreeksen

   Lineaire benadering vanaf $(0, 0)$:

   $$f((0, 0) + \vec{h}) \approx f(0, 0) + J_f|_{(0,0)}\vec{h}$$

   $$J_f|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$f((0, 0) + \vec{h}) \approx sin(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

Quadratische benadering vanaf $(0,0)$:

$$f((0,0)+\vec{h}) \approx f(0,0) + J_f|_{(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T H_f|_{(0,0)}\vec{h}$$

$$H_f|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f((0,0)+\vec{h}) \approx sin(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 h_2$$

3. Regressie

   Gegeven zijn de volgende punten:

   $(-1,0)$ $(0,2)$ $(1,1)$ $(2,2)$

   (a)

   $$y = \frac{5}{6}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 2$$

   (b)

   $$y = \frac{1}{2}x + 1$$

4. Neuraal Netwerk

   (a)

   $$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2x_1 - x_2) \\ (2x_1 - x_2) \end{pmatrix}$$

   (b)

   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c)

   $$\frac{\partial E}{\partial w_1^o} = -(t_1 - f^1(x_1, x_2))(w_1^h x_1 + w_2^h x_2)$$

   $$\frac{\partial E}{\partial w_2^o} = -(t_2 - f^2(x_1, x_2))(w_1^h x_1 + w_2^h x_2)$$

   $$\frac{\partial E}{\partial w_1^h} = \sum_{i=1}^{2} -(t_i - f^i(x_1, x_2)) w_i^o x_1$$

   $$\frac{\partial E}{\partial w_2^h} = \sum_{i=1}^{2} -(t_i - f^i(x_1, x_2)) w_i^o x_2$$

   (d)

   $$E(\vec{w}) = \frac{1}{2}(1.5 - w_1^o(w_1^h + w_2^h))^2 + \frac{1}{2}(3 - w_2^o(w_1^h + w_2^h))^2$$