

# Oefenopgaves

Wiskunde voor Neurale Netwerken

5 November 2004

## 1. Extrema

(a) Gegeven is de functie

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Geef van  $f$  de directional derivative in de richting  $(-2, 2)$  op punt  $(2, 1)$ .

(b) Voor de functie

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2^2 + 1$$

bereken de Hessian matrix (als functie van  $(x_1, x_2)$ ). Vind alle extrema en geef aan of het minima, maxima of zadelpunten zijn.

## 2. Taylorreeksen

Geef de lineaire en quadratische benaderingen vanaf  $(0, 0)$  van

$$f(xy) = \sin(xy).$$

Hint: gebruik de Taylorreeks voor  $\sin(z)$ .

## 3. Regressie

Gegeven zijn de volgende punten:

$$(-1, 0) (0, 2) (1, 1) (2, 2)$$

(a) Vind een polynomiale functie  $f(x)$  die exact door al deze punten gaat.

(b) Vind de regressielijn met de kleinste fout op de hierboven gegeven punten.

## 4. Neuraal Netwerk

Gegeven is een lineair neuraal netwerk met twee inputs, een hidden neuron en twee output neuronen. De gewichten van input naar hidden laag zijn:

$$w_1^h = 2 \quad w_2^h = -1$$

De gewichten van hidden neuron naar de output laag zijn:

$$w_1^o = \frac{1}{2} \quad w_2^o = 1$$

- (a) Formuleer dit netwerk als een functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (b) Geef de output op de input vector  $\vec{x} = (1, 1)$ .
- (c) Als fout-functie (die wij willen minimaliseren) nemen we:

$$E(\vec{w}) = \sum_{i=1}^n E_i(\vec{w}) \quad E_i(\vec{w}) = \frac{1}{2}(t_i - f^i(\vec{x}))^2$$

Waar  $f$  de functie uit (a) is,  $t_i$  is de gewenste output (target) voor output  $i$  en  $\vec{w}$  zijn de gewichten. Geef de partiele afgeleides van deze functie naar alle gewichten. Beschouw hiervoor de input en de target als gegeven waardes en de gewichten als onbekenden.

- (d) Stel de target voor input  $(1, 1)$  op:  $(1.5, 3)$ . Geef de error-functie als functie van de gewichten met gegeven input, output en target.